Luitpold-Gymnasium
Wasserburg am Inn

Kollegstufe
2000 / 2002

'Differentialrechnung' wörtlich: Rechnen mit Differentialen

Facharbeit im Leistungskurs Mathematik

Verfasser:

Manfred Hanke

Abgabetermin: 30. 01. 2002

Bewertung der Facharbeit: 15 Punkte

Bewertung der mündlichen Prüfung: 15 Punkte

Unterschrift des Kursleiters: ______________________________

Bernd Siller

Eigenständigkeitserklärung

Ich erkläre, daß ich die Arbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Vorwort

Differentialrechnung lernt man doch schon im Mathematik-unterricht, warum also eine Facharbeit darüber schreiben?

Ich möchte die Art und Weise, wie an der Schule Infinitesimal-rechnung betrieben wird, kritisch betrachten: Die Ableitung einer Funktion wird meist mit der Tangentensteigung am Graphen, das Integral mit der Fläche unter dem Graphen gleichgesetzt. Die ganze Analysis scheint bloß auf Kurvendiskussionen abzuzielen.
Die Geometrie war sicherlich eine der ersten mathematischen Disziplinen, sie ist in meinen Augen aber nicht die Grundlage für alle anderen. Es spricht umgekehrt eher für die Analysis, daß sie sich mit so großem Erfolg auf die Geometrie anwenden läßt.
In der Physik gibt es aber auch genügend andere Anwendungen. Ich meine, daß in der Differentialrechnung z.B. mit der Mechanik der 11. Klasse stärker fächerübergreifend zusammengearbeitet werden sollte, um richtige analytische Vorstellungen zu vermitteln, anstatt dort manche Größen auf dubiose Flächen in irgendwelchen Diagrammen zurückzuführen!

In dieser Facharbeit habe ich mich bemüht, die Infinitesimal-rechnung in ihrer Eigenständigkeit hervorzuheben und von den geometrischen Beispielen deutlich zu unterscheiden.

Manfred Hanke, im Januar 2002

Inhaltsverzeichnis

1. Rechnen mit Differentialen

1.1. Einführung

Die **Ableitung** f'(x) einer differenzierbaren Funktion f: x → f(x) beschreibt das **lokale Änderungsverhalten**. Sie ist als Grenzwert des Differenzenquotienten Δf/Δx (aus der Differenz der Funktionswerte Δf und der der Argumente Δx) für gegen Null strebende Differenzen definiert: $f'(x) = \lim\limits_{dx \to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$.

Sie wird auch als **Differentialquotient** df/dx bezeichnet.

Im Fischer Lexikon ([2], S. 109) findet sich hierzu:

> dy/dx ist also als einheitliches Symbol aufzufassen. So erscheint die Bezeichnung ›Differentialquotient‹ als nicht korrekt. Für ihre Beibehaltung gibt es einen historischen Grund. Von der Entdeckung der Differentialrechnung (um 1700 durch *Newton* und *Leibniz*) an bis zur letzten Jahrhundertwende hat man die Ableitung $f'(x_0)$ als Quotienten unendlich kleiner Größen, eben der ›Differentiale‹, aufgefaßt. Das ist zwar rechnerisch vielfach zweckmäßig, logisch aber nicht haltbar [...] .

Wie man im Folgenden sehen wird, ist es durchaus aufschlußreich, dennoch mit **Differentialen** zu arbeiten, so z.B. einen Differentialquotienten f'(x) = df/dx in df = f'(x) · dx aufzuspalten. Man muß aber vorsichtig sein, ein Differential ist **kein** algebraisches Symbol für einen **konkreten Wert**. (Würde man es als Grenzwert einer Differenz definieren, dann hätte es immer den Wert Null!)

Differentiale sind Objekte der Infinitesimalrechnung, die auf lokaler Ebene **funktionale Beziehungen** zwischen Variablen (zur Wechselseitigkeit siehe 2.2.3.) beschreiben. Somit kann das Differential einer Variable nur im Zusammenhang mit dem einer anderen auftauchen - im Quotienten, was wieder einen konkreten Wert ergibt, oder in einer Gleichung.

Philosophisch betrachtet vermitteln Differentiale eine deterministische Einstellung: **Kleine Ursachen** haben **kleine Wirkungen**. (Die Chaostheorie lehrt zwar, daß dies nicht immer zutrifft, solche Systeme sollen hier jedoch nicht betrachtet werden!) Aus der Kenntnis des Verhaltens einer Funktion im Kleinen kann man alles

Weitere ableiten, bzw. - mathematisch gesprochen - **integrieren**: Die Funktion f wird aus ihrem Differential df bestimmt, indem man diese kleinen Änderungen in unendlich kleinen Schritten aufaddiert: Das Intervall $[a=x_0,\ x_N=b]$ werde von den Stellen x_i aufgeteilt, wobei $(x_i - x_{i-1}) \to 0$ für $N \to \infty$. Dann ist

$$f(b) = f(a) + \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right) = f(a) + \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f'(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$f(b) = f(a) + \int_{f(a)}^{f(b)} df = f(a) + \int_a^b f'(x)\, dx$$

1.2. Funktionen von mehreren Veränderlichen

1.2.1. Partielle Ableitung und totales Differential

Für Funktionen von mehreren Veränderlichen können **partielle Ableitungen** nach jeder unabhängigen Variablen gebildet werden, indem man alle anderen konstant hält und dann "normal ableitet". Um hervorzuheben, daß es sich um eine partielle Ableitung handelt, schreibt man meist im Differentialquotienten ∂ statt d.

Beispiel: partielle Ableitung von f(x, y, z) nach y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{dy \to 0} \frac{f(x, y+dy, z) - f(x, y, z)}{dy}$$

Das **totale Differential** der Funktion ergibt sich unter Berücksichtigung aller unabhängigen Variablen als Linearkombination der einzelnen Differentiale mit ihren partiellen Ableitungen als Faktor: $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$.

Beispiel: $g(x, y) = x^2 \cdot e^{x \cdot y}$

$dg = (2x \cdot e^{x \cdot y} + x^2 \cdot e^{x \cdot y} \cdot y)\, dx + (x^2 \cdot e^{x \cdot y} \cdot x)\, dy$

Sind die Funktionen hinreichend oft stetig-differenzierbar, kann (nach [2], S.159) bei **höheren Ableitungen** die Reihenfolge, nach welcher Variable abgeleitet wird, vertauscht werden.

So ist z.B. $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

1.2.2. Gradient eines Skalarfelds

Haben die unabhängigen Variablen die Bedeutung von **Raumkoordinaten**, nennt man eine Funktion, die jedem Punkt eine Zahl zuordnet, ein **Skalarfeld**. Man faßt die Koordinaten oft zu einer Größe, einem Vektor, zusammen: $f(x, y, z) = f(\vec{r})$.

Das totale Differential kann man nun als Skalarprodukt auffassen:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z}\right) \circ (dx; dy; dz) =: \vec{\nabla} f \circ d\vec{r}$$

Der Vektor $\vec{\nabla} f$ heißt **Gradient** von f und zeigt in Richtung der stärksten Feldänderung: Das Skalarprodukt $df = \left|\vec{\nabla} f\right| \cdot \left|d\vec{r}\right| \cdot \cos\varphi$ ist bei konstantem $\left|d\vec{r}\right|$ maximal, wenn $|\cos \varphi| = 1$, also $d\vec{r}$ parallel zu $\vec{\nabla} f$ ist.

1.3. Näherungsformeln

Ersetzt man in einer Formel Differentiale durch Differenzen mit echten Werten, erhält man **Näherungsformeln**, weil die Grenzwertbildung fehlt, die natürlich um so besser stimmen, je kleiner die Differenzen wirklich sind: $df = f'(x_0) \cdot dx$ wird zu $\Delta f \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$ oder $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0)$, die Funktion wird also durch die der Tangente an den Graphen ersetzt - Differentiation bedeutet **Linearisierung**.

Beispiel: Kleinwinkelnäherung für $x_0 = 0$: $\sin x \approx x \approx \tan x$

Die allgemeinere Formel für das totale Differential ist Grundlage der **Fehlerrechnung**: Bestimmt man aus den Größen $x_1, x_2, \ldots$, die mit Fehlern von $\pm\Delta x_i$ behaftet sind, eine neue Größe f, so kann deren Fehler zu $\Delta f \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \cdot \Delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \cdot \Delta x_2 + \ldots$ abgeschätzt werden.

Beispiel: Produkt $P = F_1 \cdot F_2$; $\Delta P \approx F_2 \cdot \Delta F_1 + F_1 \cdot \Delta F_2$

Die relativen Fehler addieren sich: $\Delta P/P \approx \Delta F_1/F_1 + \Delta F_2/F_2$.

1.4. Einfache geometrische Beispiele

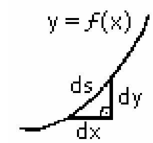
1.4.1. Steigung

Da die Steigung (der Tangens des Steigungswinkels) einer Geraden als Längenverhältnis $\Delta y / \Delta x$ von vertikaler und horizontaler Kathete in einem Steigungsdreieck definiert ist, ist die **lokale Steigung** des Graphens einer Funktion eben genau die Ableitung **dy/dx**.

1.4.2. Bogenlänge

Die Bogenlänge einer vom Graphen der Funktion f (krummlinig) begrenzten Figur kann nicht unmittelbar angegeben werden.

Man kann sich jedoch leicht den Zusammenhang der Differentiale überlegen: Das **Streckendifferential ds** kann nach Pythagoras durch $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ausgedrückt werden. Wegen $dy = f'(x) \cdot dx$ ist $ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx$.



Die Länge des Kurvenstücks zwischen x=a und x=b könnte damit durch folgendes Integral berechnet werden: $s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$

Solche Integrale können allerdings in den meisten Fällen nicht ausgewertet werden. Die Kettenlinie jedoch ist rektifizierbar:

Beispiel: $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$s_0(x) = \int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt = \int_0^x \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4}}\, dt = \int_0^x \left| \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right| dt = \left[\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right]_0^x$$

$s_0(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sqrt{f(x)^2 - 1}$; die Bogenlänge kann also sogar mit Zirkel und Lineal konstruiert werden. (Satz von Pythagoras!)

1.4.3. Krümmung

Die durchschnittliche Krümmung eines Kurvenstücks ist (nach [4], S. 467) definiert als Verhältnis der Änderung des Steigungswinkels $\Delta\tau$ (im Bogenmaß) zur Bogenlänge Δs.

Die **momentane Krümmung** K des Graphens der Funktion f ist dementsprechend $d\tau/ds$, was man wie folgt berechnen kann:

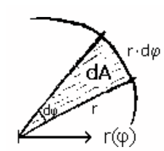
$$\tau(x) = \arctan f'(x) \quad \Rightarrow \quad d\tau/dx = \frac{1}{1+f'(x)^2}\cdot\left[f'(x)\right]' \quad \text{(vgl. 2.1.)}$$

$$K(x) = \frac{d\tau}{ds} = \frac{\left[1+f'(x)^2\right]^{-1}\cdot f''(x)\cdot dx}{\sqrt{1+f'(x)^2}\cdot dx} = \frac{f''(x)}{\left[1+f'(x)^2\right]^{3/2}}$$

1.4.4. Flächenberechnung

Anhand der Fläche zwischen dem Graphen der positiven Funktion f und der x-Achse wird die Integralrechnung meistens eingeführt. Das Flächendifferential dA ist eine Rechtecksfläche $dA = f(x)\cdot dx$, somit ist die Gesamtfläche zwischen $x=x_1$ und $x=x_2$ $A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$.

Ist eine Kurve in **Polarkoordinaten**, also der Abstand r vom Ursprung in Abhängigkeit vom Winkel φ mit einer festen Achse, gegeben, kann man leicht die Fläche im Innern der Kurve berechnen: dA ist eine Dreiecksfläche, dA = 1/2 · r · (r·dφ).



Die Fläche des Sektors zwischen φ_1 und φ_2 ist also $A = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)^2\,d\varphi$.

Beispiel: Ellipse (aus [4], S. 482)

$$r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cdot\cos\varphi} \quad \Rightarrow \quad A(\alpha) = \frac{p^2}{2}\cdot\int_0^{\alpha}\frac{1}{(1+\varepsilon\cdot\cos\varphi)^2}\,d\varphi = \ldots \quad \text{(siehe 2.3.5.)}$$

1.5. Stochastik kontinuierlicher Zufallsgrößen

Für kontinuierliche Zufallsgrößen *X* gibt es keine **Elementarereignisse** der Art *X*=x mehr. Dem entspricht nun stets ein **infinitesimal kleines Intervall** x < *X* ≤ x+dx. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt sich dann als $W(x) = \lim_{dx\to 0}\frac{P(x<X\le x+dx)}{dx}$.

Wegen $P(x<X\le x+dx) = F(x+dx)-F(x)$ ist W genau die Ableitung der kumulativen Verteilungsfunktion F, die umgekehrt nun **statt** durch eine **Summe** durch das **Integral** $F(x) = \int_{-\infty}^{x} W(x^*)\,dx^*$ berechnet werden kann. Entsprechend ergeben sich die Formeln für Erwartungswert $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot W(x)\,dx$ und Varianz $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\cdot W(x)\,dx$.

Ist *Y* eine **Funktion** $x \to y$ einer kontinuierlichen, nach W_x verteilten Zufallsgröße *X*, kann man deren Wahrscheinlichkeitsverteilung W_y durch Übergang zur Größe *X* herleiten:

$$W_y(y) = \lim_{dy \to 0} \frac{P\left(y < Y \leq y + dy\right)}{dy} = \lim_{dy \to 0} \frac{P\left(x(y) < X \leq x(y+dy)\right)}{dy} = \lim_{dx \to 0} \frac{P\left(x(y) < X \leq x(y) + dx\right) \cdot dx}{dy \qquad \cdot dx}$$

(1.3. gilt für Differentiale exakt: $x(y+dy) = x(y) + \frac{dx}{dy} \cdot dy = x(y) + dx$.

Die Funktion muß stetig sein, dann strebt mit dy auch dx $\to$ 0.)

Somit ist $W_y(y) = W_x(\,x(y)\,) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right|$. Der Betrag ist notwendig, weil die Herleitung nur für positive dx/dy, also monoton steigende x(y), gilt. Ansonsten müßte die Aussage "y < $Y \leq$ y+dy" durch "x > $X \geq$ x+dx" ersetzt werden.

Beispiel: siehe S. 10.

Die ausführliche Berechnung liegt im Anhang vor.

2. Rechentechniken

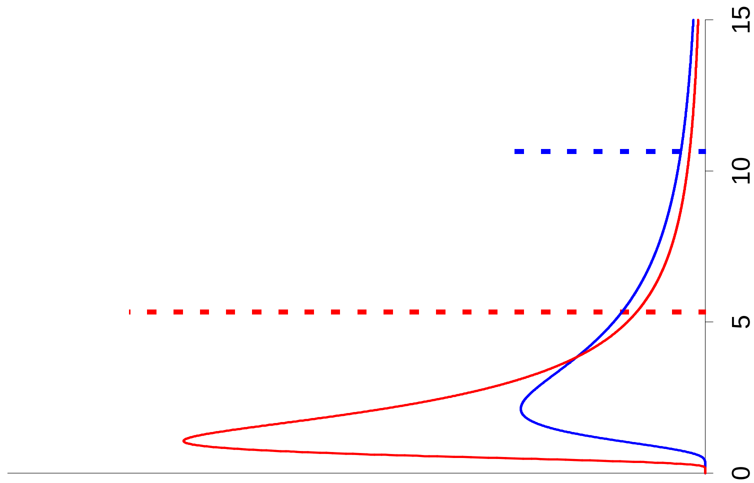
Um mit Differentialen rechnen zu können, muß man **Differential- und Integralrechnung** beherrschen.

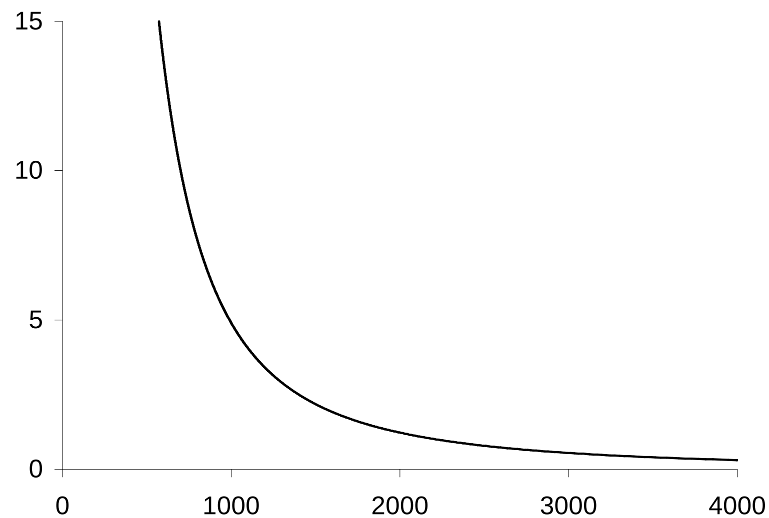
2.1. Grundfunktionen (vgl. [1], S. 62, S. 66)

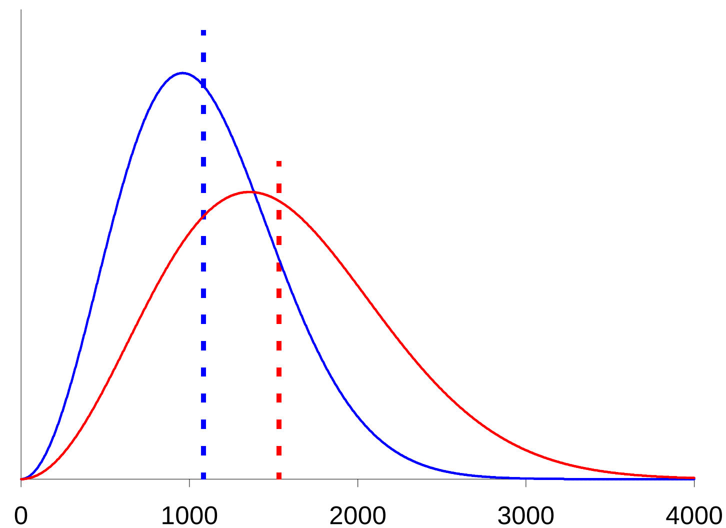
Es ist praktisch, auf eine **Tabelle von Grundfunktionen** mit ihren Ableitungen und Stammfunktionen zurückgreifen zu können:

Ableitung **f'(x)**	Funktion **f(x)**	Stammfunktion **F(x)**
$n \cdot x^{n-1}$	x^n	$x^{n+1}/(n+1)$ für $n \neq -1$
$-1/x^2$	$1/x$	$\ln \lvert x \rvert$
e^x	e^x	e^x
cos x	sin x	- cos x
- sin x	cos x	sin x
$(1-x^2)^{-1/2}$	arcsin x	(vgl. 2.2.3)
$1/(1+x^2)$	arctan x	

zu 1.5.: *Beispiel* für kontinuierliche Verteilungen







<u>rechts</u>: v - W_v - Diagramm
Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung von Natriumatomen der Temperatur 1200 K (2400 K)

<u>rechts oben</u>: v - z - Diagramm
Atome treten waagrecht aus einer Quelle aus und fallen in z-Richtung frei, bis sie horizontal 1 m bis zum Schirm durchlaufen haben.

<u>oben</u>: (gedrehtes) z - W_z - Diagramm
Verteilungen auf dem Schirm

2.2. Differentiation

Jede Funktion, die aus Grundfunktionen und -operatoren aufgebaut ist, kann auch abgeleitet werden!
Zur Schreibweise: "Nach x ableiten" wird im Folgenden oft durch den **Differentialoperator d/dx** ausgedrückt, bei benannten Funktionen wird die Strichschreibweise beibehalten.

2.2.1. Linearitäts-Gesetze

Summenregel: d/dx [f(x)+g(x)] = f'(x) + g'(x)

Regel vom konstanten Faktor: d/dx [c·f(x)] = c · f'(x)

Diese beiden Sätze lassen sich einfach beweisen, indem man sie auf die entsprechenden Sätze für Grenzwerte zurückführt.

2.2.2. Produkt- und Kettenregel, Quotientenregel

Produktregel: d/dx [f(x)·g(x)] = f'(x)·g(x) + f(x)·g'(x)

Diese Regel kann durch geeignete Umformung des Differenzen-quotienten-Grenzwerts bewiesen werden.

Kettenregel: f(x) = A**(**I(x)**)** ⇒ f'(x) = A'**(**I(x)**)**·I'(x)

Die Kettenregel kann man sehr gut verstehen, wenn man sie mit Differentialquotienten formuliert: $\frac{dA}{dx} = \frac{dA}{dI} \cdot \frac{dI}{dx}$.

Der ausführliche Beweis lautet:

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{A(I(x_1)) - A(I(x_0))}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} \left(\frac{A(i_1) - A(i_0)}{i_1 - i_0} \cdot \frac{I(x_1) - I(x_0)}{x_1 - x_0} \right); \text{ mit } i_j = I(x_j)$$

Es muß vorausgesetzt werden, daß I differenzierbar und damit stetig ist. Dann strebt i_1-i_0 mit x_1-x_0 gegen Null. Auch A muß differenzierbar sein, dann existieren die einzelnen Grenzwerte:

$$f'(x_0) = \lim_{i_1 \to i_0} \frac{A(i_1) - A(i_0)}{i_1 - i_0} \cdot \lim_{x_1 \to x_0} \frac{I(x_1) - I(x_0)}{x_1 - x_0} = A'(i_0) \cdot I'(x_0)$$

Quotientenregel: $\frac{d}{dx}\left(\frac{Z(x)}{N(x)}\right) = \frac{Z'(x) \cdot N(x) - Z(x) \cdot N'(x)}{(N(x))^2}$

Beweis mit Produkt- und Kettenregel für Z(x) · [1/N(x)]

2.2.3. Ableitung der Umkehrfunktion

Funktion und Umkehrfunktion drücken den **selben Zusammenhang** zwischen den Variablen aus, nur wird jeweils die andere als unabhängige Variable betrachtet. Hat f: $x \to y(x)$ als Ableitung $f'(x) = dy/dx$, so ist von der **Umkehrfunktion** f^{-1}: $y \to x(y)$ die Ableitung durch **dx/dy** = $1/f'(x)$ gegeben, sie muß nur noch mittels $x = f^{-1}(y)$ in Abhängigkeit von y (als unabhängiger Variable der Umkehrfunktion) formuliert werden: $[f^{-1}]'(y) = 1/f'\boldsymbol{(}f^{-1}(y)\boldsymbol{)}$.

Beispiele: trigonometrische Arcusfunktionen

y = sin x hat für $x \in [-\pi/2; \pi/2]$ als Umkehrfunktion x = arcsin y. Wegen $\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x = \sqrt{1-(\sin x)^2}$ ist $\frac{d(\arcsin y)}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

y = tan x hat für $x \in [-\pi/2; \pi/2]$ als Umkehrfunktion x = arctan y.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sin x \cdot \frac{1}{\cos x}\right) = \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} + \sin x \cdot \frac{-1}{(\cos x)^2} \cdot (-\sin x) = 1 + (\tan x)^2$$

Also ist $\frac{d(\arctan y)}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+(\tan x)^2} = \frac{1}{1+y^2}$.

2.3. Integration

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI) ist die **Integration** die **Umkehrung der Differentiation**: Ist F(x) Stammfunktion der stetigen Funktion f(x), ist also d/dx F(x) = f(x), werden bestimmte Integrale nach $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ berechnet.

Integration ist also in der Praxis mit der **Suche nach einer Stammfunktion** gleichzusetzen. Welche Herausforderung das manchmal sein kann zeigt wohl am besten der folgende Spruch: *"Differenzieren ist Handwerk, Integrieren ist Kunst."*

Die Menge aller Stammfunktionen von f(x) wird meist mit dem **unbestimmten Integral** $F(x) = \int f(x)\,dx + C$ bezeichnet und darauf hingewiesen, daß das Gleichheitszeichen hier nicht transitiv verwendet werden darf (z.B. in [1], S. 66). Dieses berücksichtigend wird im Folgenden der Einfachheit halber das "+ C" weggelassen.

2.3.1. Linearitäts-Gesetze

Die Gesetze, die sich aus den Grenzwert-Sätzen folgern lassen, gelten auch für die Integration:

$\int f(x)+g(x)\,dx \;=\; \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

$\int c\cdot f(x)\,dx \;=\; c \cdot \int f(x)\,dx$

2.3.2. Partielle Integration

Fürs Integrieren gibt es **keine Produktregel** wie fürs Ableiten: $\frac{d}{dx}\big(f(x)\cdot g(x) \big) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$.

Löst man aber hier nach $f(x)\cdot g'(x)$ auf und integriert die Gleichung unter Anwendung des HDIs, erhält man die Formel für die **partielle Integration** $\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$.

Diese Methode führt also das Integral eines Produkts auf das Integral eines anderen Produkts zurück, bei dem ein Faktor abgeleitet und der andere integriert wurde - unter Umständen kann man das neue Integral im Gegensatz zum vorherigen lösen.

Typische Anwendungs-Beispiele:

1. Manche Integrale können gelöst werden, indem man erst ein Produkt mit dem **Faktor 1** erzeugt:

$$\int \ln x\,dx \;=\; \int \ln x \cdot 1\,dx \;=\; \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx \;=\; x\cdot \ln x - x$$

2. Ist der erste Faktor ein **Polynom** und verkompliziert sich der zweite bei mehrmaligem Integrieren nicht, kann man das Integral durch **wiederholte Anwendung** der partiellen Integration auswerten:

$$\int x^2 \cdot \cos x\,dx \;=\; x^2\cdot \sin x - \int 2x\cdot \sin x\,dx \;=\; x^2 \cdot \sin x - \Big(2x\cdot(-\cos x) - \int 2\cdot(-\cos x)\,dx\Big)$$
$$=\; x^2\cdot \sin x \;+\; 2x\cdot \cos x \;-\; 2\cdot \sin x$$

3. Für den Fall, daß sich ein **Integral reproduziert** kann man die Gleichung danach **auflösen**:

$$\int e^x\cdot \cos x\,dx \;=\; e^x\cdot \sin x - \int e^x\cdot \sin x\,dx \;=\; e^x\cdot \sin x - \Big(e^x\cdot(-\cos x) - \int e^x\cdot(-\cos x)\,dx\Big)$$
$$\Rightarrow \quad 2\cdot \int e^x \cdot \cos x\,dx \;=\; e^x\cdot\big(\sin x + \cos x\big)$$

2.3.3. Integration durch Substitution

Mit der **Umkehrung der Kettenregel** kann man das Produkt einer zusammengesetzten Funktion und der Ableitung der inneren Funktion integrieren: $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x))$ mit $F(t) = \int f(t)\,dt$.

Mit Differentialen formuliert die Leibnitz'sche Schreibweise das als $\int f(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}\,dx = \int f(g)\,dg = F(g)$.

In der Praxis wird ein derartiges Produkts schnell (und dankbar) erkannt, wenn man bei der Suche nach einer Stammfunktion die Kettenregel halbwegs im Auge behält.

Wichtige Spezialfälle sind hierbei f(x) = 1/x und f(x) = -1/x; zusammengefaßt ergibt sich $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = ln\left| g(x) \right|$.

Beispiel: $\int tan\,x\,dx = -\int \frac{-sin\,x}{cos\,x}\,dx = -ln\left| cos\,x \right|$

Die zweite und wichtigere Anwendungsmöglichkeit, die eher den Charakter einer **Substitution** hat, ergibt sich, wenn man die Formel andersherum liest. Mit gängigeren Variablen lautet sie: $\int f(x)\,dx = \int f(x(u)) \cdot \frac{dx}{du}\,du$. Das Verfahren kann erfolgbringend angewendet werden, wenn im ursprünglichen Funktionsterm f(x) ein **Term** als **u(x) substituiert** werden kann. Durch Einsetzen der Umkehrfunktion x(u) ergibt sich dann eine einfachere Funktion.

Beispiel:

$$I(x) = \int sin\sqrt{x}\,dx; \quad \sqrt{x} =: u \quad \Leftrightarrow \quad x = u^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{du} = 2u$$

$$I(x) = \int sin\,u \cdot 2u\,du = 2u \cdot (-cos\,u) - \int 2 \cdot (-cos\,u)\,du = -2u \cdot cos\,u + 2 \cdot sin\,u$$

$$I(x) = 2 \cdot \left(sin\sqrt{x} - \sqrt{x} \cdot cos\sqrt{x} \right)$$

2.3.4. Integration gebrochen-rationaler Funktion durch Partialbruchzerlegung

Für gebrochen-rationale Funktionen (Brüche von Polynomen) gibt es zur Integration **keine Umkehrung der Quotientenregel**!

Außerdem muß ein solches Integral nicht wieder eine gebrochen-rationale Funktion ergeben, wie schon $\int$ **1/x dx = ln x** zeigt. Für alle anderen n $\neq$ -1 ist $\int \mathbf{x^n\, dx = x^{n+1} / (n+1)}$. Damit kann man schon alle **Partialbrüche** der Art a / $(x+b)^n$ integrieren.

Jede gebrochen-rationale Funktion kann (nach [4], S. 599) als Summe geeigneter Partialbrüche dargestellt werden. Dazu muß zuerst der **Nenner** (über seine Nullstellen) faktorisiert werden. Für jeden **Linearfaktor** $\mathbf{(x-\alpha_i)}$ setzt man dann einen Partialbruch $A_i/(x-\alpha_i)$ mit unbestimmten Koeffizienten A_i an; tritt er in der n-ten Potenz als $\mathbf{(x-\alpha_i)^n}$ auf, werden dafür die folgenden n Partialbrüche angesetzt: $A_{i,n}/(x-\alpha_i)^n + A_{i,n-1}/(x-\alpha_i)^{n-1} + \ldots + A_{i,1}/(x-\alpha_i)$.

Durch Ausmultiplizieren und **Koeffizientenvergleich** (bei den x-Potenzen) erhält man ein Gleichungssystem für die Unbekannten der Partialbrüche. Daraufhin können die Integrale gebildet werden.

Beispiel: $f(x) = \dfrac{6x^2-22x+18}{x^3-6x^2+11x-6} = \dfrac{6x^2-22x+18}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)} = \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}$

$$\begin{aligned} 6x^2-22x+18 &= A\cdot(x-2)\cdot(x-3)+B\cdot(x-1)\cdot(x-3)+C\cdot(x-1)\cdot(x-2) \\ &= A\cdot(x^2-5x+6)+B\cdot(x^2-4x+3)+C\cdot(x^2-3x+2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [x^2]: 6 = A+B+C \\ [x]: -22 = -5A-4B-3C \\ [1]: 18 = 6A+3B+2C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \\ C = 3 \end{cases}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}\,dx = ln|x-1| + 2\cdot ln|x-2| + 3\cdot ln|x-3|$$

Nicht immer läßt sich der Nenner in Linearfaktoren zerlegen. **Irreduzible quadratische Restfaktoren** $\left((x-a)^2+b^2\right)$ werden mit $\dfrac{2A\cdot(x-a)+B}{(x-a)^2+b^2}$ angesetzt, diese Partialbrüche können folgendermaßen integriert werden: $\displaystyle\int \frac{2\cdot(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,dx = ln\left|(x-a)^2+b^2\right|$ (vgl. 2.3.3.)

$$\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{1}{b}\arctan\frac{x-a}{b} \qquad \text{(vgl. 2.1.)}$$

Für irreduzible quadratische Faktoren **in höherer Potenz** kombiniert man beide Ansätze. In einer Integraltabelle ([4'], S. 137) findet man für $I(x) = \int \frac{Ax+B}{(ax^2+2bx+c)^{k+1}}\,dx$ folgende Rekursionsformel:

$$I(x) = \frac{1}{2k\cdot(ac-b^2)}\cdot\left\{\frac{(aB-bA)\cdot x+(bB-cA)}{(ax^2+2bx+c)^k} + (2k-1)\cdot(aB-bA)\cdot\int\frac{1}{(ax^2+2bx+c)^k}\,dx\right\}$$

Rückwärts kann man diese Formel (mit dem HDI) leicht beweisen.

Beispiel: $\int\frac{x^2+1}{(x^2+q^2)^2}\,dx = \int\frac{Ax+B}{(x^2+q^2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+q^2}\,dx \underset{\dots}{=} \int\frac{1-q^2}{(x^2+q^2)^2}+\frac{1}{x^2+q^2}\,dx =$

$$= \frac{1}{2\cdot1\cdot(1\cdot q^2-0)}\left\{\frac{\big(1\cdot(1-q^2)-0\big)\cdot x+(0-0)}{(x^2+q^2)^1}+(1)\cdot\big(1\cdot(1-q^2)-0\big)\cdot\int\frac{1}{x^2+q^2}\,dx\right\} + \frac{1}{q}\,arctan\frac{x}{q}$$

$$= \frac{1}{2q^2}\cdot\left(\frac{(1-q^2)\cdot x}{x^2+q^2}+(1-q^2)\cdot\frac{1}{q}\,arctan\frac{x}{q} + (2q^2)\cdot\frac{1}{q}\,arctan\frac{x}{q}\right)$$

$$= \frac{1}{2q^2}\cdot\left(\frac{(1-q^2)\cdot x}{x^2+q^2}+\frac{1+q^2}{q}\cdot arctan\frac{x}{q}\right)$$

2.3.5. Substitution für Quotienten von trigonometrischen Polynomen

Das Integral eines Quotienten von Summen von Potenzen von sin x, cos x oder tan x kann durch die Substitution $t(x)=tan\,\frac{x}{2}$ auf ein nach 2.3.4. berechenbares Integral zurückgeführt werden, weil sowohl diese Terme nach der Substitution mit den **Halbtangensformeln** $sin\,x = \frac{2\cdot t}{1+t^2}$, $cos\,x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ und $tan\,x = \frac{2\cdot t}{1-t^2}$, als auch die Ableitung der Umkehrfunktion $\frac{dx}{dt} = \frac{d\,(2\,arctan\,t)}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$ gebrochen-rationale Funktionen sind.

Beispiel von 1.4.4.: $\int_0^\alpha\frac{1}{(1+\varepsilon\cdot cos\,\varphi)^2}\,d\varphi = \int_0^\alpha\frac{1}{\left(1+\varepsilon\cdot\frac{1-t(\varphi)^2}{1+t(\varphi)^2}\right)^2}\,d\varphi = [J(t)]_0^{tan(\alpha/2)}$

mit $J(t) = \int\frac{(1+t^2)^2}{\big((1+t^2)+\varepsilon\cdot(1-t^2)\big)^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\cdot\int\frac{1+t^2}{\big((1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)\cdot t^2\big)^2}\,dt$; $q^2=\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$

$$J(t) = \frac{2}{(1-\varepsilon)^2}\cdot\int\frac{1+t^2}{(q^2+t^2)^2}\,dt \underset{2.3.4.}{=} \dots = \frac{2}{1-\varepsilon^2}\cdot\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)\cdot q}\cdot arctan\frac{t}{q}-\frac{\varepsilon\cdot t}{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)\cdot t^2}\right)$$

$J(0) = 0$, damit wird für den Ellipsen-Sektor $A(\alpha) = \frac{p^2}{2}\cdot J(tan\frac{\alpha}{2})$.

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

3.1. Definitionen (nach [5], S. 1 ff.)

Eine **Differentialgleichung** (DGL) ist eine Beziehung (in Form einer Gleichung) zwischen einer Funktion und mindestens einer ihrer Ableitungen. Die **Ordnung** einer DGL bezeichnet die Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung. Eine **partikuläre Lösung** ist eine Funktion, die die Gleichung identisch erfüllt, wenn man ihre entsprechenden Ableitungen einsetzt. Die Lösung ist nicht eindeutig; die **vollständige Lösung** einer DGL n-ter Ordnung ist im Allgemeinen eine n-parametrige Funktionenschar. Eine DGL heißt **gewöhnlich** (im Unterschied zu partiell), wenn die Funktion nur von einer Variable abhängig ist.

Im Folgenden bezeichnet x die unabhängige und y die abhängige Variable, die gesuchte Funktion ist also **y(x)**.

3.2. Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades

Tritt bei DGL erster Ordnung die Ableitung nur in Potenzen und nicht als Argument komplizierterer Funktionen auf, ist die DGL also ein Polynom in der ersten Ableitung, nennt man die höchste auftretende Potenz den **Grad** der DGL erster Ordnung.

Kann man die entsprechende algebraische Gleichung lösen, so kann eine solche DGL erster Ordnung auf mehrere separate **DGL erster Ordnung und ersten Grades** zurückgeführt werden. Dabei kann y' explizit als $y' = f(x, y)$ dargestellt werden, d.h. die Ableitung ist in Abhängigkeit von dem Argument und dem Funktionswert gegeben.

Beispiel: $(y')^2 - (y + \cos x)\cdot y' + y\cdot\cos x = 0$

Diese DGL erster Ordnung und zweiten Grades kann durch zwei DGL erster Ordnung und ersten Grades ersetzt werden:

$(y' - y) \cdot (y' - \cos x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = y \quad \text{oder} \quad y' = \cos x$

3.2.1. Trennen der Variablen

Dieses Verfahren kann auf den **Spezialfall** von y' = f(x, y) angewendet werden, bei dem f(x, y) in **Faktoren** zerfällt, die jeweils **nur von einer Variable abhängen**. Die DGL läßt sich also folgendermaßen formulieren: y' = dy/dx = g(x) / h(y).

Hier können die **Differentiale getrennt** und **separat integriert** werden: g(x) dx = h(y) dy ⇔ ∫ g(x) dx = ∫ h(y) dy + C. Das ist schon die Lösung, lediglich in **implizit**er Form. Die explizite Lösung erhält man nur, wenn die Gleichung nach y aufgelöst werden kann.

Beispiel: y' = dy/dx = y ⇔ 1/y dy = dx

∫ 1/y dy = ∫ dx + C ⇔ ln y = x + C ⇔ y = e^{x+C}

C ist der willkürliche Parameter der **vollständigen Lösung** und nicht bloß eine Integrationskonstante. Ist die partikuläre Lösung gesucht, die das Wertepaar (x_0, y_0) enthält, kann man (nach [3], S.95) die Differentiale direkt von diesem Punkt aus aufsummieren und mit bestimmten Integralen ansetzen: $\int_{x_0}^{x} g(x^*)\,dx^* = \int_{y_0}^{y} h(y^*)\,dy^*$.

3.2.2. Exakte Differentialgleichungen

Eine Funktion **y(x)** sei implizit durch **f(x, y) = 0** formuliert. Das **totale Differential** von f muß verschwinden, weil f konstant ist. So ist nach 1.2.1. $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$.

Eine **DGL** $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{g(x, y)}{h(x, y)}$ kann genauso als $g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0$ geschrieben werden. Ist die DGL **exakt**, d.h. stellt sie das totale Differential einer Funktion f(x, y) dar, so ist (nach [5], S. 12) **f(x, y) = C** die vollständige Lösung.

Die **Integrabilitätsbedingung** gibt Auskunft, ob sich überhaupt ein f(x, y) finden läßt, das $g = \frac{\partial f}{\partial x}$ und $h = \frac{\partial f}{\partial y}$ erfüllt. Falls es sich um partielle Ableitungen von f handelt, müssen nach 1.2.1. folgende zweite Ableitungen gleich sein: $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$, weil $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Die Funktion **f** kann dann **durch** einfache **Integrationen erhalten** werden: $\int g(x,y)\,dx$ kann sich von f(x, y) höchstens durch einen addierten Term unterscheiden, der nicht von x abhängt, da dieser beim (partiellen) Ableiten nach x wegfallen würde. Man erhält f durch Vergleich mit $\int h(x,y)\,dy$, für das Entsprechendes bezüglich eines von y unabhängigen Term gilt.

Beispiel: $\left(x\cdot e^x + y\cdot e^x\right)\cdot dx + e^x \cdot dy = 0$

Die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial}{\partial y}\left(x\cdot e^x + y\cdot e^x\right) = e^x = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\right)$ ist erfüllt. Es ist $\int x\cdot e^x + y\cdot e^x\,dx = \left(x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x dx\right) + y\cdot e^x = (x-1+y)\cdot e^x$ und $\int e^x\,dy = y\cdot e^x$.

Der Term $(x-1)\cdot e^x$ ist aus dem zweiten Integral nicht hervorgegangen, weil er sich dort nur wie eine Integrationskonstante verhält.

Die vollständige Lösung lautet somit $(x-1+y)\cdot e^x = C$; sie kann sogar explizit dargestellt werden: $y = C\cdot e^{-x} + 1 - x$.

3.2.3. Integrierende Faktoren

Ist eine DGL nicht exakt, kann sie durch **Erweitern** mit einem geeigneten Faktor m (einem **Euler'schen Multiplikator**) zu einer **exakten DGL** gemacht werden.

Setzt man m als unbekannte Funktion m(x, y) an dann lautet die DGL (von 3.2.2.) $g(x,y)\cdot m(x,y)\cdot dx + h(x,y)\cdot m(x,y)\cdot dy = 0$. Die Integrabilitätsbedingung wird zu einer **partiellen DGL** für m(x, y):

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\cdot m(x,y) + g(x,y)\cdot\frac{\partial m(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial h(x,y)}{\partial x}\cdot m(x,y) + h(x,y)\cdot\frac{\partial m(x,y)}{\partial x}.$$

Im Allgemeinen ist es natürlich viel zu schwierig, diese vollständig zu lösen. Aber es reicht ja bereits, eine **partikuläre Lösung** zu finden. Wenn man keine Lösung erraten kann, sollte man es noch mit Funktionen m versuchen, die nur von einer Variable abhängen. Dann sind die jeweils anderen partiellen Ableitungen Null, man erhält eine gewöhnliche DGL, die man vielleicht lösen kann.

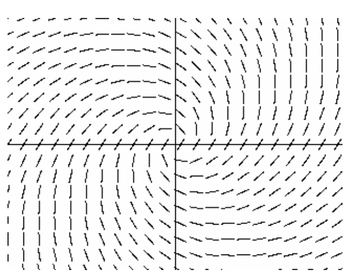
Beispiel: $y' = -(x+y) \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)\cdot dx + 1\cdot dy = 0$. Diese DGL ist wegen $\frac{\partial}{\partial y}(x+y) = 1 \neq \frac{\partial}{\partial x}(1) = 0$ nicht exakt; für $(x+y)\cdot m\cdot dx + m\cdot dy = 0$ lautet die Integrabilitätsbedingung $1\cdot m + (x+y)\cdot\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial m}{\partial x}$. Ist m nur von x abhängig, können in $m = \frac{dm}{dx}$ die Variablen getrennt werden (vgl. 3.2.1.) und es ergibt sich $m(x) = e^{x+c}$. Setzt man z. B. $m_{C=0}$ in die ursprüngliche DGL ein, ergibt sich $(x+y)\cdot e^x\cdot dx + e^x\cdot dy = 0$, eine exakte DGL, die bereits in 3.2.2. gelöst wurde.

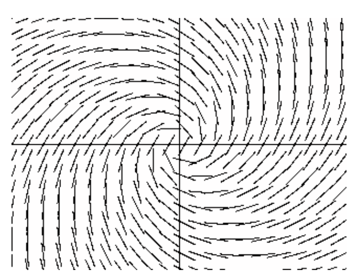
3.2.4. Richtungsfelder

Eine DGL y' = f(x, y) kann man geometrisch interpretieren: Jedem Punkt (x, y) der Ebene wird eine **Tangentensteigung y'** zugeordnet. Zeichnet man überall dort ein **Linienelement**, eine theoretisch infinitesimal kleine Strecke mit dieser Steigung, entsteht das **Richtungsfeld** der DGL. In Wirklichkeit können natürlich nur an endlich vielen Punkten kurze Strecken gezeichnet werden.
Solche Richtungsfelder können einfach **mit** einem **Computer erstellt** werden. Ein paar Dinge sollten jedoch beachtet werden:

- Es empfiehlt sich, alle Linienelemente mit der gleichen Länge Δs zu zeichnen. Dann muß die x-Komponente $\Delta x = \frac{\Delta s}{\sqrt{1+(y')^2}}$ betragen, Δy ergibt sich natürlich zu $\Delta y = y'\cdot\Delta x$ (vgl. 1.4.2., 1.4.1.).
- Die Strecke Δs sollte mindestens 30 Pixel betragen, damit verschiedene Steigungen entsprechend aufgelöst werden.
- Der Abstand d der Punkte liegt in der Größenordnung von Δs. Gute Bilder erhält man für Δs ≈ 0,8 d, dann ist jede Linie einzeln zu erkennen, oder Δs ≈ 1,5 d, dann überlappen sie sich teilweise.

Beispiel: $y' = \frac{m\cdot y + x}{m\cdot x - y}$
mit $m = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
in einem beliebigen Bereich um (0; 0)


Δs = 0,8 d


Δs = 1,5 d

Richtungsfelder lassen erkennen, wie die Lösung der DGL ungefähr aussehen wird. So kann man auch einmal eine **Lösung erraten**: Wer von den gezeigten Bildern an logarithmische Spiralen erinnert wird, kann deren Richtigkeit als Lösung durch Einsetzen bestätigen;

$$r(\varphi) = C \cdot e^{\gamma \cdot \varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(t) = C \cdot e^{\gamma \cdot t} \cdot \cos t \\ y(t) = C \cdot e^{\gamma \cdot t} \cdot \sin t \end{cases}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\gamma \cdot e^{\gamma \cdot t} \cdot \sin t + e^{\gamma \cdot t} \cdot \cos t}{\gamma \cdot e^{\gamma \cdot t} \cdot \cos t + e^{\gamma \cdot t} \cdot (-\sin t)} = \frac{\gamma \cdot y + x}{\gamma \cdot x - y};$$ $\gamma=m$ löst die DGL.

3.2.5. Homogene Differentialgleichungen

Als **homogen** werden in diesem Zusammenhang DGL y' = f(x, y) bezeichnet, für die **f(t·x, t·y) = f(x, y)** ist. Das Richtungsfeld und die Lösungskurven sind dann **maßstabsunabhängig** (vgl. *Beispiel* aus 3.2.4.). Die Substitution **y**(x) **=: v**(x)**·x** führt immer zu einer DGL, deren Variablen getrennt werden können:

$$\frac{d}{dx}(v \cdot x) = \frac{dv}{dx} \cdot x + v \cdot 1 = f(x, v \cdot x) = f(1, v) = f^*(v)$$

Beispiel aus 3.2.4.: $y' = \frac{m \cdot y + x}{m \cdot x - y}$

$$\frac{dv}{dx} \cdot x + v = \frac{m \cdot vx + x}{m \cdot x - vx} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dx} \cdot x = \frac{mv + 1}{m - v} - v = \frac{mv + 1 - mv + v^2}{m - v}$$

Trennen der Variablen: $\frac{m - v}{1 + v^2} dv = \frac{1}{x} dx$;

Integration: $m \cdot \arctan v - \frac{1}{2} \cdot \ln\left|1 + v^2\right| = \ln|x| + C$ (vgl. 2.3.4.)

Resubstitution: $m \cdot \arctan \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \cdot \ln\left|1 + \frac{y^2}{x^2}\right| = \ln|x| + C$

Durch Einsetzen kann man nachweisen, daß die Lösung, die in 3.2.4. bewiesen wurde, zu dieser impliziten Form äquivalent ist.

3.3. Kurvenscharen

3.3.1. Aufstellen der Differentialgleichung

Die vollständige Lösung einer DGL erster Ordnung stellt in der Regel eine einparametrige Kurvenschar dar.

Umgekehrt kann eine **Kurvenschar** meist **durch** eine **DGL beschrieben** werden:

Die Kurvenschar mit dem Parameter a sei **implizit** durch **f(x, y, a) = 0** gegeben. Für die Differentiale gilt dann (totales Differential, siehe 1.2.1.): $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial a}da = 0$.

Eine Gleichung, die die Beziehung zwischen den Punkten einer einzelnen Kurve ausdrückt, ergibt sich für **da = 0**, weil längs einer solchen Kurve der Scharparameter **a konstant** bleibt. Berücksichtigt man beide Gleichungen, kann man a eliminieren: f(x, y, a) = 0 und $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ führen zur **DGL** der Kurvenschar.

Beispiel: $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2 \cdot a \cdot (x+y) + a^2 = 0$

Es muß gelten: $2(x-a) + 2(y-a) \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{a-x}{a-y}$

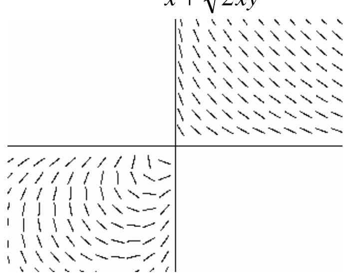
a kann direkt aus der Gleichung der Kurvenschar erhalten werden:

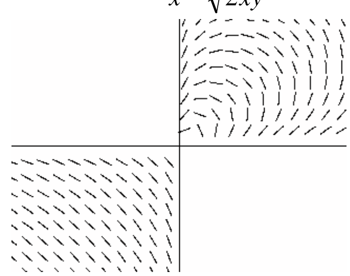
$$a_{1/2} = \frac{2(x+y) \pm \sqrt{4(x^2+2xy+y^2) - 4 \cdot (x^2+y^2)}}{2} = x + y \pm \sqrt{2xy}$$

Da durch jeden Punkt zwei Kreise verlaufen, wird die Schar von zwei DGL dargestellt:

$$y' = -\frac{y+\sqrt{2xy}}{x+\sqrt{2xy}} \qquad y' = -\frac{y-\sqrt{2xy}}{x-\sqrt{2xy}}$$

Die zugehörigen Richtungsfelder schauen so aus: (Maßstab beliebig)





3.3.2. Enveloppen

Zu einer Kurvenschar kann es eine **einhüllende Kurve**, Enveloppe, geben, die alle Kurven der Schar berührt.

Die Enveloppe zur implizit durch f(x, y, a) = 0 gegebenen Kurvenschar kann (nach [4], S. 202) aus $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ erhalten werden, wenn a wieder mittels der Ausgangsgleichung eliminiert wird.

Die Hüllkurve besteht aus den Schnittpunkten der Kurven, die zu den Parameterwerten a und a+da (für infinitesimal kleines da) gehören. Die Differenz der jeweiligen impliziten Gleichungen $f(x, y, a+da) - f(x, y, a) = 0$ stellt genau die Bedingung dar, daß die partielle Ableitung von f nach a verschwinden muß.

Beispiel von 3.3.1.: $x^2 + y^2 - 2a\cdot(x+y) + a^2 = 0$

Für eine Enveloppe muß gelten: $-2(x+y) + 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = x+y$.

Eingesetzt ergibt sich $x^2 + y^2 - (x+y)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2xy = 0$.

Die x- (y=0) und die y-Achse (x=0) sind Hüllkurven der Schar.

3.3.3. Isogonale Trajektorien

Kurven, die jede Kurve einer Schar unter einem bestimmten Winkel φ schneiden, werden **isogonale Trajektorien** genannt. Ist speziell φ = 90°, spricht man von orthogonalen Trajektorien.

Isogonale Trajektorien können leicht erhalten werden, wenn die Kurvenschar durch eine **DGL y' =** f(x, y) darstellt ist: Ist α der Steigungswinkel einer Kurve der Schar an einem Punkt (x, y), so muß für den der Trajektorie α_T gelten: $\alpha_T - \alpha = \varphi$. Für die Tangens der Winkel gilt, wenn man nach 1.4.1. $\tan \alpha = y'$ und $\tan \alpha_T = y_T'$ einsetzt, sowie zur Abkürzung $\tan \varphi =: m$ schreibt:

$$\tan(\alpha_T - \alpha) = \frac{\tan \alpha_T - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha_T \cdot \tan \alpha} = \frac{y_T' - y'}{1 + y_T' \cdot y'} = \tan \varphi =: m$$

Das kann leicht nach y_T' aufgelöst werden. Man erhält die **DGL der Trajektorien-Schar**: $y_T' = \dfrac{m + y'}{1 - m \cdot y'}$

Die **DGL der orthogonalen Trajektorien** könnte aus dieser Formel als Grenzwert für $m \to \infty$ erhalten werden. Man kann sich aber auch leicht überlegen, daß die Senkrechte zur Steigung $y' = \dfrac{dy}{dx}$ durch $y_{oT}' = -\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{1}{y'}$ dargestellt wird.

Beispiel: $x^2 + y^2 = a^2$ (konzentrische Kreise um den Ursprung)

DGL (nach 3.3.1.): $2x \cdot dx + 2y \cdot dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}$

Trajektorien: $y_T' = \frac{m - x/y}{1 + m \cdot x/y} = \frac{m \cdot y - x}{y + m \cdot x} = \frac{m^* \cdot y + x}{m^* \cdot x - y}$ mit m* = -m

Diese DGL wird von logarithmischen Spiralen gelöst, wie in 3.2.4. und 3.2.5. bereits gezeigt wurde.

orthogonale Trajektorien: $y_{oT}' = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y_{oT} = C \cdot x$

Alle Ursprungsgeraden schneiden die Kreisschar senkrecht.

3.4. Differentialgleichungen höherer Ordnung

Das Kalkül der Differentiale kann hervorragend auf **DGL erster Ordnung** angewendet werden, weil diese **nur** den **funktionalen Zusammenhang** zweier Variablen beschreiben.

Bei **DGL höherer Ordnung** besteht a priori ein Unterschied zwischen abhängiger und unabhängiger Variable. Zwar können die bisherigen **Lösungsmethoden nicht direkt übertragen** werden, viele Fälle können jedoch auf DGL erster Ordnung zurückgeführt werden.

Für **lineare DGL** $f_n(x) \cdot y^{(n)} + f_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + f_1(x) \cdot y' + f_0(x) \cdot y = g(x)$ gäbe es relativ allgemeine Lösungsverfahren (siehe [5], S. 92 ff.), zum Abschluß soll jedoch nur noch die **homogene lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten** erwähnt werden: $y'' + 2a \cdot y' + b \cdot y = 0$ hat für $b > a^2$ die gedämpfte harmonische Schwingung $y(x) = A \cdot e^{-a \cdot x} \cdot sin\left(\sqrt{b - a^2} \cdot x + B\right)$ als vollständige Lösung. Diese DGL tritt in der Physik häufig auf, z.B. beim Federpendel oder bei elektromagnetischen Schwingkreisen.

4. Anhang

Die ausführlichen Berechnungen zur kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung des physikalischen Beispiels von 1.5. finden sich erst hier, weil sie etwas aufwendig, aber trotzdem interessant sind.

4.1. Benötigte Integrale

Es hat sich als vorteilhaft erwiesen, einige Integrale allgemein zu formulieren und dann öfters auf sie zurückgreifen zu können:

S: $\int_0^\infty v^k \cdot e^{-\alpha \cdot v^2}\, dv = \int_0^\infty \left(\alpha^{-1/2} \cdot u\right)^k \cdot e^{-u^2} \cdot \alpha^{-1/2}\, du = \alpha^{-\frac{k+1}{2}} \cdot \int_0^\infty u^k \cdot e^{-u^2}\, du$

(Substitution $\alpha \cdot v^2 =: u^2 \quad \Leftrightarrow \quad v = \alpha^{-1/2} \cdot u \quad \Rightarrow \quad dv = \alpha^{-1/2} \cdot du$)

R: Rekursionsformel $J_k = \int_0^\infty u^k \cdot e^{-u^2}\, du = \frac{k-1}{2} \cdot \int_0^\infty u^{k-2} \cdot e^{-u^2}\, du$

durch partielle Integration für $J_k = \int_0^\infty (-\frac{1}{2} u^{k-1}) \cdot (-2u \cdot e^{-u^2})\, du$:

$$J_k = \left[(-\frac{1}{2} u^{k-1}) \cdot e^{-u^2}\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-\frac{k-1}{2} u^{k-2}) \cdot e^{-u^2}\, du = [0-0] + \frac{k-1}{2} \cdot \int_0^\infty u^{k-2} \cdot e^{-u^2}\, du$$

$\mathbf{I_0}$: $\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (aus [4'], S. 159); $\mathbf{I_1}$: $\int_0^\infty u \cdot e^{-u^2}\, du = \left[-\frac{1}{2} e^{-u^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$

4.2. Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung W_v der Geschwindigkeitsbeträge in einem idealen Gas der Molekülmasse m und der Temperatur T lautet: $W_v(v) = \gamma \cdot v^2 \cdot e^{-\alpha \cdot v^2}$ mit $\alpha = \frac{m}{2 \cdot k \cdot T}$.

(aus: Gerthsen., Vogel: "Physik", Springer Verlag, Berlin 1993)

4.2.1. Normierungsfaktor

$$\int_0^\infty W_v(v)\, dv = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = \left[\int_0^\infty v^2 \cdot e^{-\alpha \cdot v^2}\, dv\right]^{-1} \underset{(\mathrm{S}, \mathrm{R}, \mathrm{I}_0)}{=} \left[\alpha^{-3/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]^{-1} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \alpha^{3/2}$$

4.2.2. Mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \int_0^\infty v \cdot W_v(v)\,dv = \gamma \cdot \int_0^\infty v^3 \cdot e^{-\alpha \cdot v^2}\,dv \underset{(S,\,R,\,I_1)}{=} (\frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \alpha^{3/2}) \cdot \alpha^{-2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \alpha^{-1/2}$$

Setzt man den Wert für α ein, erhält man $\bar{v} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot T}{m}}$.

Der Standardansatz der Thermodynamik ist $\frac{1}{2} \cdot m \cdot \overline{v^2} = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$, also ist $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m}}$. Im Vergleich mit $\bar{v}$ ergibt sich ein konstanter Korrekturfaktor: $\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \cdot \sqrt{\overline{v^2}} \approx 0{,}9213 \cdot \sqrt{\overline{v^2}}$.

4.2.3. Maximum der Verteilung

Es ist $\frac{dW_v}{dv} = \gamma \cdot \left(2v \cdot e^{-\alpha \cdot v^2} + v^2 \cdot e^{-\alpha \cdot v^2} \cdot (-2\alpha \cdot v)\right) = 2\gamma \cdot v \cdot e^{-\alpha \cdot v^2} \cdot \left(1 - \alpha \cdot v^2\right)$; die Ableitung geht bei $v_{Max} = \alpha^{-1/2}$ durch Null. Der mittlere Wert $\bar{v}$ ist also immer um einen Faktor $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \approx 1{,}128$ größer als das Maximum.

4.2.4. Streuung

Es ergibt sich $\sigma^2 = \int_0^\infty (v-\bar{v})^2 \cdot W_v(v)\,dv = \frac{3}{2}\alpha^{-1}$:

$$\sigma^2 = \gamma \cdot \int_0^\infty v^4 \cdot e^{-\alpha \cdot v^2}\,dv - 2\gamma \cdot \bar{v} \cdot \int_0^\infty v^3 \cdot e^{-\alpha \cdot v^2}\,dv + \gamma \cdot \bar{v}^2 \cdot \int_0^\infty v^2 \cdot e^{-\alpha \cdot v^2}\,dv$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \alpha^{3/2} \cdot \alpha^{-5/2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \circ \qquad (S, R, R, I_0)$$

$$- 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \alpha^{3/2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \alpha^{-1/2} \cdot \alpha^{-2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \qquad (S, R, I_1)$$

$$+ \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \alpha^{3/2} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \alpha^{-1/2}\right)^2 \cdot \alpha^{-3/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (S, R, I_0)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \alpha^{-1} - \frac{8}{\pi} \cdot \alpha^{-1} + \frac{8}{\pi} \cdot \alpha^{-1}$$

4.3. Verteilung auf dem Schirm

Die Atome treten waagrecht aus einer Quelle aus. Während sie horizontal die Strecke a bis zu einem Schirm durchlaufen, vollführen sie in z-Richtung einen freien Fall.

$$v = \frac{a}{\Delta t}; \quad z = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \quad \Rightarrow \quad z(v) = \frac{q}{v^2} \quad \text{mit } q = \frac{g \cdot a^2}{2}$$

4.3.1. Wahrscheinlichkeitsverteilung

Für die Formel von 1.5. wird die Umkehrfunktion benötigt:

$$v(z) = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{z}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dz} = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{q} \cdot z^{-3/2}$$

$$W_z(z) = W_v(v(z)) \cdot \left| \frac{dv}{dz} \right| = \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \alpha^{3/2} \right) \cdot \frac{q}{z} \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot q}{z}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{q} \cdot z^{-3/2} \right)$$

$$W_z(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot (\alpha \cdot q)^{3/2} \cdot z^{-5/2} \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot q}{z}}$$

4.3.2. Mittelwert

Nach 1.5. ist $\bar{z} = \int_0^\infty z \cdot W_z(z)\, dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot (\alpha \cdot q)^{3/2} \cdot \int_0^\infty z^{-3/2} \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot q}{z}}\, dz$. Mit diesem Integral hat man Glück, es kann mit folgender Substitution gelöst werden: $\frac{\alpha \cdot q}{z} =: u^2 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{\alpha \cdot q}{u^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{du} = -2 \cdot \frac{\alpha \cdot q}{u^3}$:

$$\bar{z} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot (\alpha \cdot q)^{3/2} \cdot \int_\infty^0 \left(\frac{\alpha \cdot q}{u^2} \right)^{-3/2} \cdot e^{-u^2} \cdot \left(-2 \cdot \frac{\alpha \cdot q}{u^3}\right) du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot (\alpha \cdot q) \cdot \int_0^\infty e^{-u^2}\, du$$

$$\bar{z} \underset{(\mathrm{I}_0)}{=} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot (\alpha \cdot q) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 2 \cdot \alpha \cdot q = \frac{m \cdot g \cdot a^2}{2 \cdot k \cdot T}$$

Dieser Wert stimmt nicht mit dem zur mittleren Geschwindigkeit gehörenden z überein: $z(\bar{v}) = \frac{g \cdot a^2 \cdot (\pi \cdot m)}{2 \cdot (8 \cdot k \cdot T)} = \frac{\pi}{8} \cdot \bar{z}$.

4.3.3. wahrscheinlichster Wert

Die Ableitung hat bei $z_{Max} = \frac{2}{5} \cdot \alpha \cdot q$ ihre Nullstelle:

$$\frac{dW_z}{dz} = \frac{2 \cdot (\alpha \cdot q)^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(-\frac{5}{2} \cdot z^{-7/2} \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot q}{z}} + z^{-5/2} \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot q}{z}} \cdot \frac{\alpha \cdot q}{z^2} \right) \sim z^{-7/2} \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot q}{z}} \cdot \left(\frac{\alpha \cdot q}{z} - \frac{5}{2} \right)$$

Der wahrscheinlichste Wert liegt nur bei 1/5 des Erwartungswerts.

Literaturverzeichnis

[1] Barth F., Mühlbauer P., Nikol F., Wörle K.:
"Mathematische Formeln und Definitionen",
Bayerischer Schulbuch-Verlag, München 1990

[2] Behnke H., Remmert R., Steiner H.-G., Tietz H.:
"Mathematik 1",
Fischer Taschenbuch Verlag, Frankfurt am Main 1964

[3] Behnke H., Tietz H.:
"Mathematik 2",
Fischer Taschenbuch Verlag, Frankfurt am Main 1966

[4] Fachredaktion des Bibliographischen Instituts:
"DUDEN Rechnen und Mathematik",
Bibliographisches Institut, Mannheim 1969

[4'] (Anhang von [4])
Rottmann K.:
"Mathematische Formelsammlung",
Bibliographisches Institut, Mannheim 1960

[5] Ince E. L.:
"Die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen",
Bibliographisches Institut, Mannheim 1956

[6] Keil K.-A., Kratz J., Müller H., Wörle K.:
"Infinitesimalrechnung 2",
Bayrischer Schulbuch-Verlag, München 1997

[7] Keil K.-A., Kratz J., Müller H., Wörle K.:
"Analysis 2",
Bayrischer Schulbuch-Verlag, München 1979

[8] Kunick A.:
"Gewöhnliche Differentialgleichungen",
B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich 1989

[9] Schmidt W.:
"Lehrprogramm Vektorrechnung",
Physik Verlag, Weinheim 1978