$\texttt{MhGlobProj}$ – stereographische Zentralprojektion einer Kugel

Manfred Hanke

22.03.2007

Die Projektion

Die Einheitskugel wird von einem Punkt (d, 0, 0) aus auf die Ebene $\{(0,\xi,\eta) \mid \xi,\eta \in \mathbf{R}\}$ zentralprojiziert.

Geradengleichung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad + \quad t \cdot \begin{pmatrix} d \\ -\xi \\ -\eta \end{pmatrix} \tag{1}$$

Kugelgleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 \quad = \quad \mathbf{1}^2 \tag{2}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich zusammen eine quadratische Gleichung für den Parameter t:

$$t^2 \cdot d^2 \quad + \quad (1-t)^2 \cdot \underbrace{(\xi^2 + \eta^2)}_{=:\,\rho^2} \quad = \quad \mathbf{1}^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (d^2 + \rho^2) \cdot t^2 \;-\; 2\rho^2 \cdot t \;+\; (\rho^2 - \mathbf{1}^2) \;=\; 0 \tag{3}$$

$$\Rightarrow \quad t_{1/2} \quad = \quad \frac{2\rho^2 \pm \sqrt{(2\rho^2)^2 - 4(d^2+\rho^2)\cdot(\rho^2 - \mathbf{1}^2)}}{2(d^2+\rho^2)} \quad = \quad \frac{\rho^2 \pm \sqrt{d^2 \cdot \mathbf{1}^2 - d^2 \cdot \rho^2 + \rho^2 \cdot \mathbf{1}^2}}{d^2 + \rho^2} \tag{4}$$

Durch (4) und (1) sind die Punkte $\big(x(t_{1/2}),\ y(t_{1/2}),\ z(t_{1/2})\big)$ auf der Kugel bestimmt, deren Projektion von $(d,0,0)$ aus an der Stelle $(0,\xi,\eta)$ gesehen wird. Wenn (3) keine reelle Lösung besitzt, gibt es offensichtlich keinen Schnittpunkt. Da $t_1 \geq t_2$ gilt, beschreibt t_1 den Schnittpunkt auf der “Vorderseite” der Kugel, der näher an $(d,0,0)$ ist.

Die Rotationen und Kugelkoordinaten

Damit $(d,0,0)$ nicht nur einem Punkt über dem Äquator ($\lambda_0 = 0$) mit der geographischen Breite $\varphi_0 = 0$ entspricht, sondern die Projektion auf beliebige Koordinaten (φ_0, λ_0) zentriert werden kann, wird der Punkt $\big(x(t_{1/2}),\ y(t_{1/2}),\ z(t_{1/2})\big)$ um φ_0 um die y-Achse und um λ_0 um die z-Achse rotiert, was durch folgende lineare Abbildungen beschrieben wird:

$$\begin{aligned} x' &= \cos(\varphi_0)\cdot x - \sin(\varphi_0)\cdot z \\ y' &= y \\ z' &= \sin(\varphi_0)\cdot x + \cos(\varphi_0)\cdot z \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} x'' &= \cos(\lambda_0)\cdot x' - \sin(\lambda_0)\cdot y' \\ y'' &= \sin(\lambda_0)\cdot x' + \cos(\lambda_0)\cdot y' \\ z'' &= z' \end{aligned} \tag{5}$$

(Die Reihenfolge der Rotationen ist nicht beliebig! Man kann sich z.B. anhand des Nordpols verdeutlichen, dass die φ-Rotation zuerst erfolgen muss: Wenn der Punkt nicht zuerst nach $(0,0,\mathbf{1})$ auf die z-Achse rotiert werden würde, würde er bei der λ-Rotation evtl. einen großen Weg auf einem Breitenkreis zurücklegen. Der Nordpol ist aber ein punktförmiger $\varphi_0 = 90°$-Breitenkreis; jede Länge λ_0 sollte den gleichen Punkt beschreiben.)

Nun werden die Koordinaten des Punktes (x'', y'', z'') auf der Kugel bestimmt. Kugelkoordinaten sind gegeben durch:

$$\vec{r}(\varphi,\lambda) \quad = \quad \mathbf{1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cdot\cos(\lambda) \\ \cos(\varphi)\cdot\sin(\lambda) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad \stackrel{!}{=} \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} \varphi &= \arcsin(z''/\mathbf{1}) \\ \lambda &= \arctan(y''/x''),\ \text{evtl.}\ \pm\pi, \\ & \quad \text{je nach den Vorzeichen von } x'' \text{ und } y'' \end{aligned} \tag{6}$$

(Die Kugelkoordinaten kann man gerade aus (5) durch Rotation des Punktes $(\mathbf{1},0,0)$ herleiten.)

Die Rekonstruktion des Bildes

Damit kann man für jeden Punkt (ξ,η) auf der Projektionsebene zurück berechnen, von welchen Koordinaten (φ,λ) er erzeugt worden ist. Man kann leicht berechnen, welchen Radius $\rho_{\max}$ die Projektion der gesamten Kugel hat: Der halbe Öffnungswinkel α des Sichtkegels von $(d,0,0)$ aus, der die Kugel gerade berührt, ist (wegen des 90°-Winkels am Berührpunkt) durch $\sin(\alpha) = \mathbf{1}/d$ gegeben. $\rho_{\max}$ ergibt sich damit (wegen des 90°-Winkels am Kugelmittelpunkt):

$$\rho_{\max}(d) \quad = \quad d\cdot\tan(\alpha) \quad = \quad d \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}} \quad = \quad \frac{d\cdot\mathbf{1}}{\sqrt{d^2 - \mathbf{1}^2}} \tag{7}$$

Man erkennt in (7), dass $\lim\limits_{d\to\infty} \rho_{\max}(d) = \mathbf{1}$ gilt, was gerade dem Grenzfall einer Parallelprojektion entspricht.

Durch Abrastern eines geeigneten Bereichs in der ξ-η Ebene kann ein Bild erzeugt werden. Die Farbwerte für den Punkt (φ, λ) auf der Erdoberfläche können für $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ und $-\pi < \lambda < \pi$ aus dem

$$\text{Pixel} \quad \left(\frac{w}{2}\cdot\left[1+\frac{\lambda}{\pi}\right],\ \frac{h}{2}\cdot\left[1+\frac{\varphi}{\pi/2}\right]\right) \qquad \text{des } w\times h \text{ Pixel großen BlueMarble-Bilds} \tag{8}$$

entnommen werden. Die Pixel-Koordinaten müssen natürlich ganzzahlig sein, darum bietet sich eine Interpolation zwischen den 4 benachbarten Pixeln des berechneten Punktes aus (8) an.

Der Schatten

Da das BlueMarble-Bild gleichmäßig beleuchtet ist, muss der Erdschatten künstlich miteinberechnet werden. Das ist aber leicht: Wenn die Sonne senkrecht über dem φ_{sun}-Breitenkreis steht (aus der Schiefe der Ekliptik ergibt sich $-23.5° \le \varphi_{\text{sun}} \le +23.5°$), steht sie zur Ortszeit t_{sun} des Projektionsort (φ_0, λ_0) am Himmel in der Richtung

$$\vec{n}_{\text{sun}}\left(\varphi_{\text{sun}},\quad \lambda_{\text{sun}} = \lambda_0 + \frac{t_{\text{sun}} - 12\,\text{h}}{24\,\text{h}}\cdot 360°\right) \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{\text{sun}})\cdot\cos(\lambda_{\text{sun}}) \\ \cos(\varphi_{\text{sun}})\cdot\sin(\lambda_{\text{sun}}) \\ \sin(\varphi_{\text{sun}}) \end{pmatrix} \quad . \tag{9}$$

Der Cosinus des Einfallswinkels α_{sun}, der sich einfach aus dem Skalarprodukt der Einheitsvektoren berechnen lässt:

$$\cos(\alpha_{\text{sun}}) \;=\; \vec{n}_{\text{sun}}(\varphi_{\text{sun}},\ \lambda_{\text{sun}}) \circ \vec{n}(\varphi,\ \lambda) \;=\; \ldots \quad , \tag{10}$$

ist ein gutes Maß für die Intensität der Sonneneinstrahlung. Für $\cos(\alpha_{\text{sun}}) > 0$ bietet sich eine Reduktion der Helligkeit des in (8) bestimmten Pixels um genau diesen Faktor an.

Links

http://pulsar.sternwarte.uni-erlangen.de/hanke/AstroAusstellung/2007/Erde/
http://pulsar.sternwarte.uni-erlangen.de/hanke/AstroAusstellung/2007/Erde/MhGlobProj/

BlueMarble: http://visibleearth.nasa.gov/view_rec.php?id=2431

| Mh