Matrix-Inversion

Problemstellung:
Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + & \dots & + a_{1N}x_N & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + & \dots & + a_{2N}x_N & = & b_2 \\ & \vdots & & & \vdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + a_{M3}x_3 + & \dots & + a_{MN}x_N & = & b_M \end{array}$$

Matrixschreibweise

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2N} \\ & \vdots & & & \\ a_{M1} & a_{M2} & a_{M3} & \dots & a_{MN} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Lösung durch Matrixinversion

Inverse Matrix:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$$

Bestimmung durch Lösen des Gleichungsystems:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}$$

$N \times N$ lineare Gleichungsysteme

$$\vec{a_i} \cdot \vec{\tilde{x}_j} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{a_i} &= \text{Zeilenvektor der Matrix } \mathbf{A} \\ \vec{\tilde{x}_j} &= \text{Spaltenvektor der Matrix } \mathbf{X} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2N} \\ & \vdots & & \\ a_{M1} & a_{M2} & \ldots & a_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2N} \\ & \vdots & & \\ x_{M1} & x_{M2} & \ldots & x_{MN} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ & \vdots & & \\ a_{M1} & a_{M2} & \dots & a_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2N} \\ & \vdots & & \\ x_{M1} & x_{M2} & \dots & x_{MN} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

1. Vertauschen zweier **Zeilen** der Matrix $\mathbf{A}$ ändert nichts an der Lösung, wenn wir die entsprechenden **Zeilen** von $\mathbf{E}$ mit vertauschen

2. Vertauschen zweier **Spalten** der Matrix $\mathbf{A}$ ändert nichts an der Lösung, wenn wir die entsprechenden **Zeilen** von $\mathbf{X}$ mit vertauschen

3. Eine **Linearkombination** der Zeilenvektoren ändert die Lösung nicht, wenn man die gleiche Kombination mit $\mathbf{E}$ durchführt.

Gauss-Jordan Verfahren:

Umformung der Matrix $\mathbf{A}$ bis Einheitsform erreicht. Rechte Seite wird dabei in $\mathbf{A}^{-1}$ überführt:

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$

1. Schritt:

a) Division der 1. Zeile durch a_{11}

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & \ldots & a_{1N}/a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2N} \\ & \vdots & & \\ a_{M1} & a_{M2} & \ldots & a_{MN} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

b) erste Zeile mit a_{i1} multiplizieren und von der i-ten Zeile abziehen

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & \ldots & a_{1N}/a_{1}1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2N} \\ & \vdots & & \\ 0 & a'_{M2} & \ldots & a'_{MN} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \ddots \end{pmatrix}$$

2. Schritt: a) Division der zweiten Zeile durch a'_{22}, b) zweite Zeile mit a'_{i2} multiplizieren und von der i-ten Zeile abziehen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & a''_{1N} \\ 0 & 1 & \ldots & a''_{2N} \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & a''_{MN} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \ddots \end{pmatrix}$$

usw.

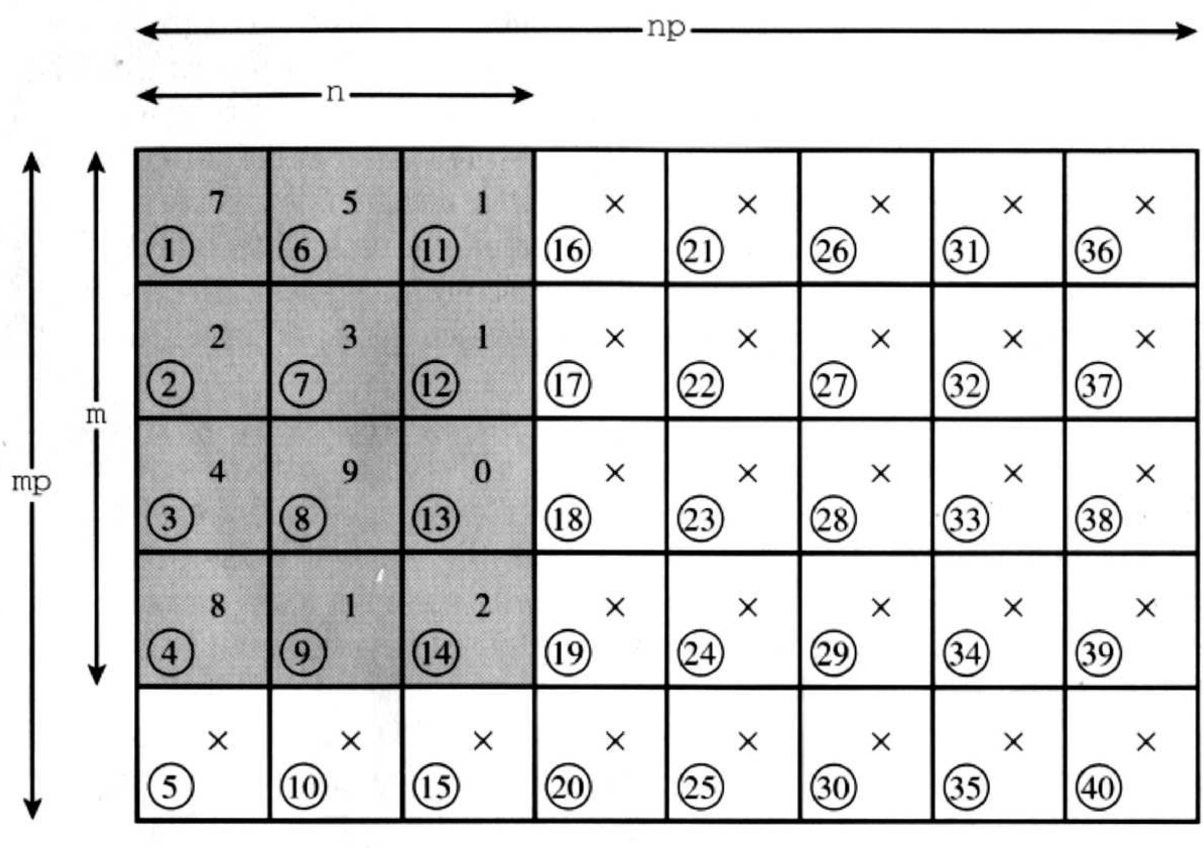
Problem: falls $a_{11} = 0$ (oder bei irgendeinem Schritt $a'_{ii} = 0$) ist das Verfahren nicht durchführbar

Ausweg: **Pivotisierung** = Umordnen der Matrix $\mathbf{A}$ durch Vertauschen der Zeilen (teilweise Pivotisierung) oder zusätzlich auch der Spalten (vollständige Pivotisierung)

Rezept: In jedem Eliminationsschritt das größte Matrixelement auf die Diagonale bringen (vermeidet numerische Problem)

Erschwernis: Buchführung über die Vertauschungsoperationen notwendig, da am Ende die Lösungsmatrix wieder sortiert werden muß.

Dimensionierung von Matrizen in Fortran



m, n: aktuelle Dimension

mp, np: “physikalische” Dimension

Übergabe an Unterprogramme: Physikalische Dimensionierung muß mit übergeben werden!