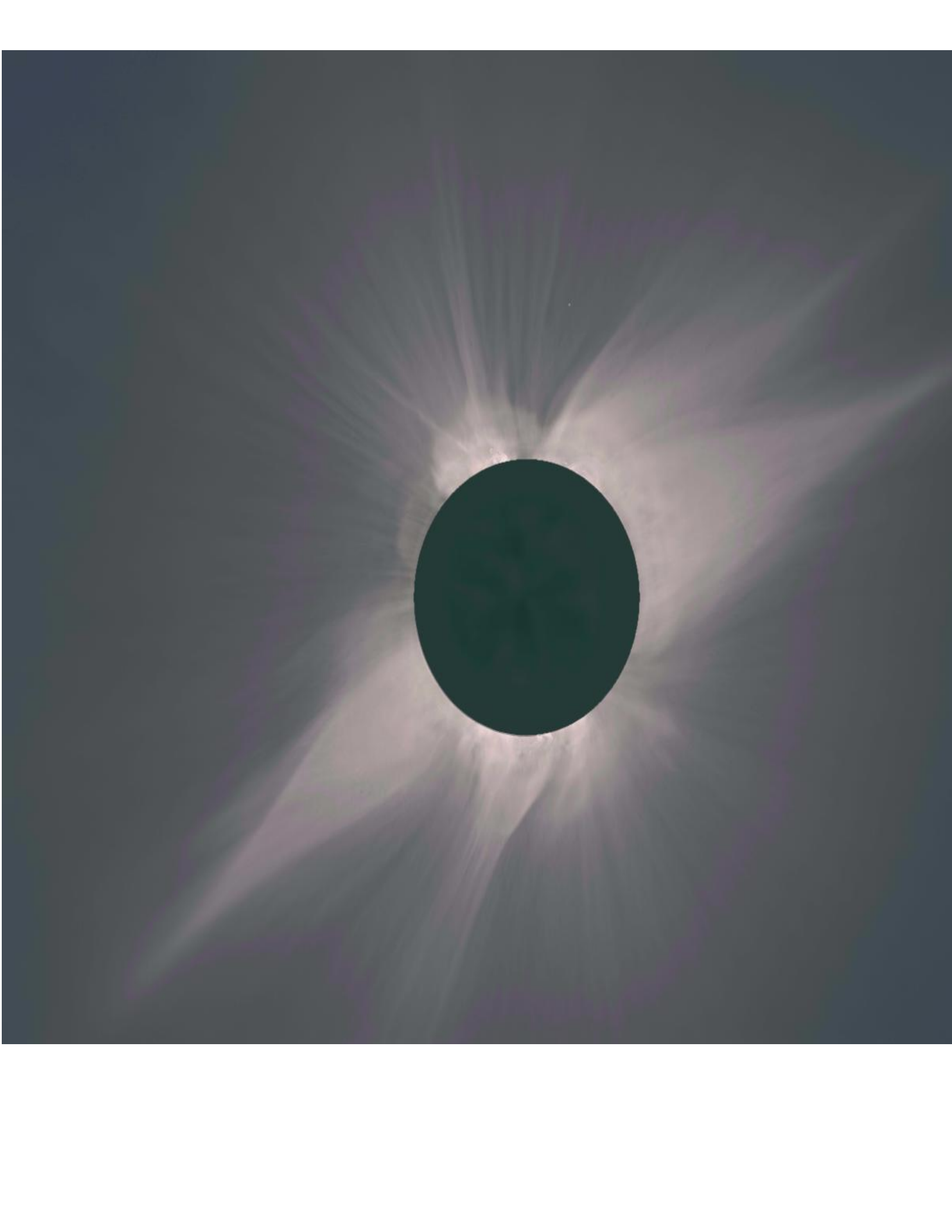
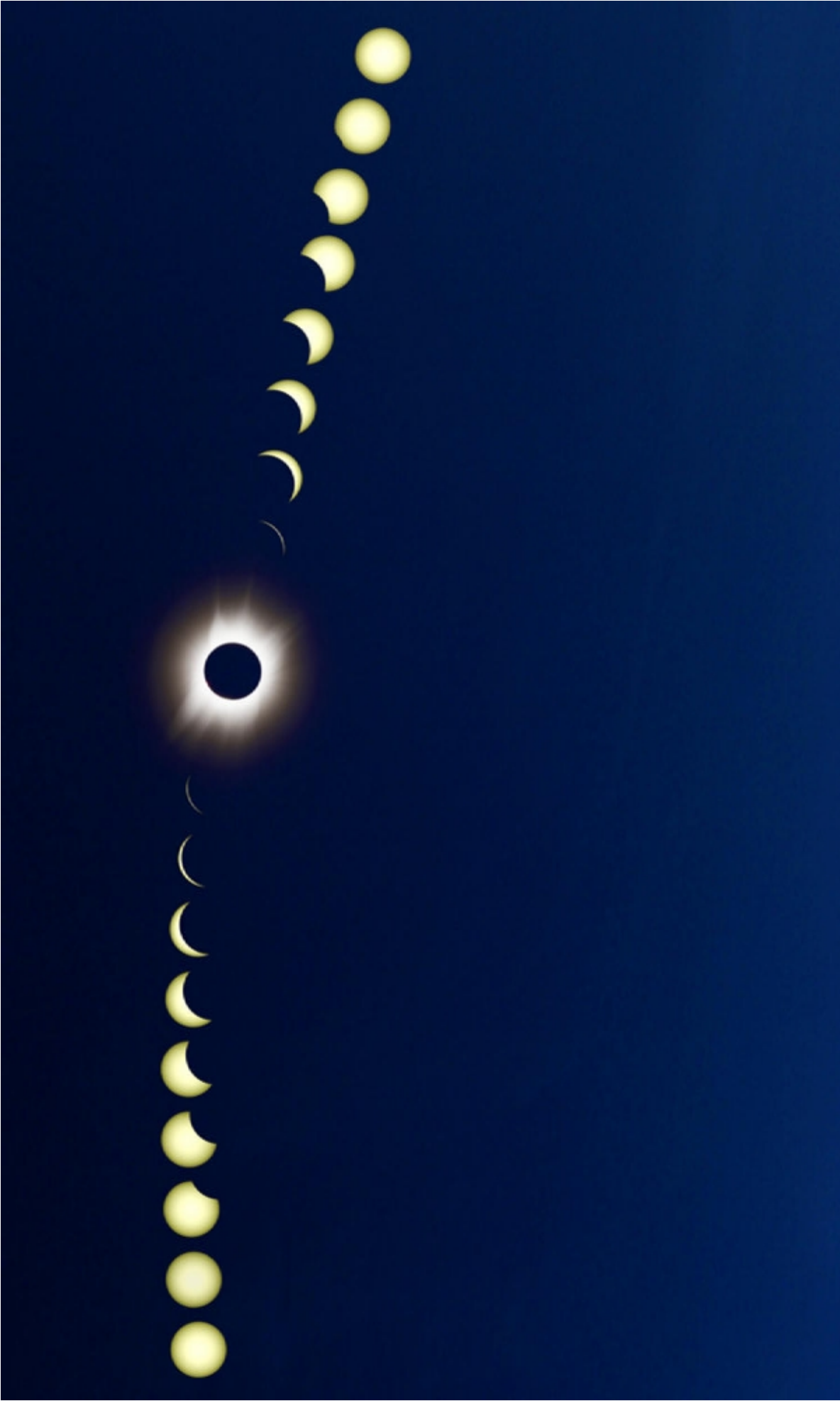




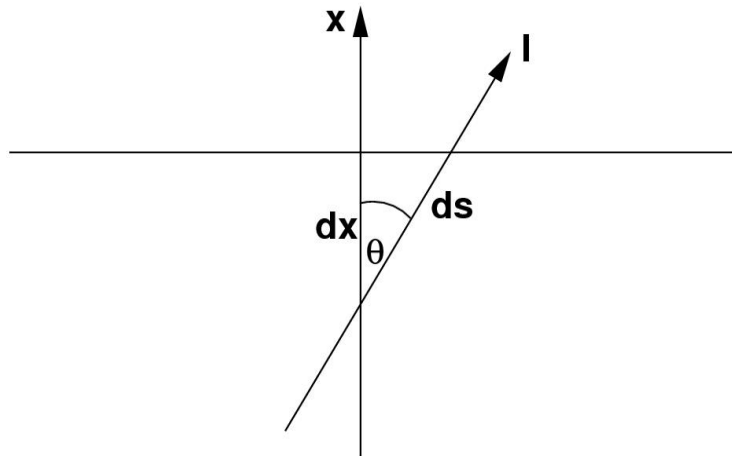


Strahlungstransport in Sternatmosphären

Strahlungstransport-Gleichung, entlang eines
Sehstrahls:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\rho\kappa_\nu I_\nu + \rho j_\nu$$

Form für plan-parallele Geometrie:



$$\mu \frac{dI_\nu(\mu, x)}{dx} = -\rho\kappa_\nu I_\nu(\mu, x) + \rho j_\nu(\mu, x)$$

$$(\mu = \cos\theta)$$

Optische Tiefe:

$$d\tau_\nu = -\kappa_\nu \rho dx$$

Neue Form der Strahlungstransportgleichung:

$$-\frac{\mu}{\rho\kappa_\nu} \frac{dI_\nu(\mu, x)}{dx} = I_\nu(\mu, x) - \frac{j_\nu(\mu, x)}{\kappa_\nu}$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI_\nu(\mu, \tau_\nu)}{d\tau_\nu} &= I_\nu(\mu, \tau_\nu) - \frac{j_\nu(\mu, \tau_\nu)}{\kappa_\nu} \\ &= I_\nu(\mu, \tau_\nu) - S_\nu(\mu, \tau_\nu) \end{aligned}$$

Quellfunktion: $S_\nu(\mu, \tau_\nu) = \frac{j_\nu(\mu, \tau_\nu)}{\kappa_\nu}$

LTE-Näherung: $S_\nu = B_\nu(T)$

Momente des Strahlungsfeldes

0. Moment – Mittlere Intensität ($\oint \mu^0 d\omega$):

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \oint I_\nu d\omega = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu d\mu$$

1. Moment – Fluß ($\oint \mu d\omega$):

$$\frac{1}{4}F_\nu = H_\nu = \frac{1}{4\pi} \oint I_\nu \mu d\omega = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu \mu d\mu$$

2. Moment – Strahlungsdruck ($\oint \mu^2 d\omega$):

$$K_\nu = \frac{1}{4\pi} \oint I_\nu \mu^2 d\omega = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu \mu^2 d\mu$$
$$P_{\text{rad}} = \frac{4\pi K_\nu}{c} \quad \text{aber : } \kappa_\nu!$$

Momente der Strahlungstransportgleichung:

0. Moment ($\oint d\omega$):

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} d\mu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (I_\nu - B_\nu) d\mu$$
$$\frac{1}{4} \frac{dF_\nu}{d\tau_\nu} = J_\nu - B_\nu$$

Strahlungsgleichgewicht:

$$F = \int_0^\infty F_\nu d\nu = \text{const} = \frac{\sigma T_{\text{eff}}^4}{\pi}$$

oder $\frac{dF}{d\tau} = 0$

1. Moment ($\oint \mu d\omega$):

$$\int_{-1}^1 \mu^2 \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} d\mu = \int_{-1}^1 (I_\nu - B_\nu) \mu d\mu$$
$$4 \frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = F_\nu$$

Diffusionsnäherung: Strahlungsfeld näherungsweise

Isotrop: $I_\nu = I_{0,\nu} + \mu I_{1,\nu} + \mu^2 I_{2,\nu} \dots$

$$K_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu \mu^2 d\mu \approx \frac{I_{0,\nu}}{3} = \frac{J_\nu}{3}$$

$$\implies \frac{4}{3} \frac{dJ_\nu}{d\tau_\nu} = F_\nu$$

Eddington-Näherung: Quasie-Isotropie in der gesamten Atmosphäre gültig, insbesondere am Rand

$$J_\nu(\tau_\nu = 0) = \frac{1}{2} \int_0^1 I_\nu(\mu, 0) d\mu = \frac{1}{2} I_0$$

$$F_\nu(\tau_\nu = 0) = 2 \int_0^1 I_\nu(\mu, 0) \mu d\mu = I_0$$

$$\implies J_\nu(0) = \frac{1}{2} F_\nu(0)$$

Graue Atmosphäre

Annahme: keine frequenzabhängigen Opazität etc., d.h. man braucht den Strahlungstransport nur für $I, J, F \dots$ zu lösen.

$$\begin{aligned}\frac{dF}{d\tau} = 0 &\implies F(\tau) = \text{const} = \frac{\sigma T_{\text{eff}}^4}{\pi} \\ \frac{dJ}{d\tau} = \frac{3}{4}F &\implies J(\tau) = \frac{3}{4}F\tau + \text{const}\end{aligned}$$

Eddington-Näherung:

$$J(0) = \frac{1}{2}F = \text{const} \quad J(\tau) = \frac{3}{4}F \cdot \left(\tau + \frac{2}{3}\right)$$

LTE-Atmosphäre im Gleichgewicht:

$$J = S = B(T) = \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

$$\boxed{\left[\frac{T(\tau)}{T_{\text{eff}}}\right]^4 = \frac{3}{4}\left(\tau + \frac{2}{3}\right)}$$

Die Mitte-Rand-Verdunkelung

Strahlungstransport-Gleichung:

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S$$

S bekannt $\Rightarrow$ Lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Faktoren. Integrierender Faktor $e^{-\tau/\mu}$:

$$\frac{d \left[I e^{-\tau/\mu} \right]}{d\tau} = -\frac{1}{\mu} S e^{-\tau/\mu}$$

Integration:

$$I(\tau_1, \mu) = I(\tau_2, \mu) e^{-(\tau_2 - \tau_1)/\mu} + \frac{1}{\mu} \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(t) e^{-(t - \tau_1)/\mu} dt$$

Emergenter Fluß der Atmosphäre: $\tau_1 = 0$,
 $\tau_2 = \infty$

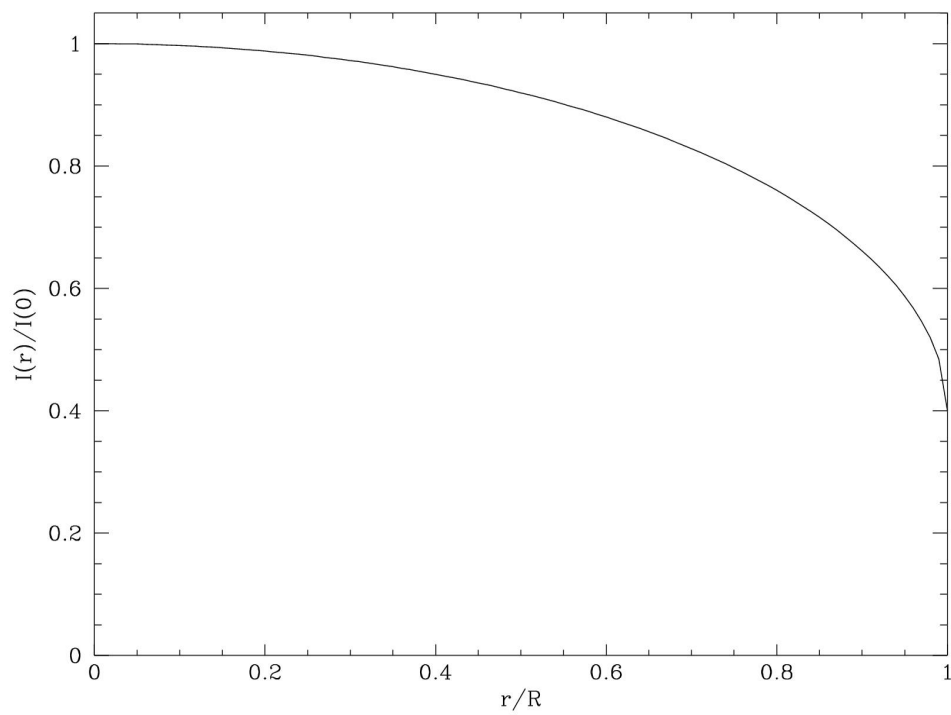
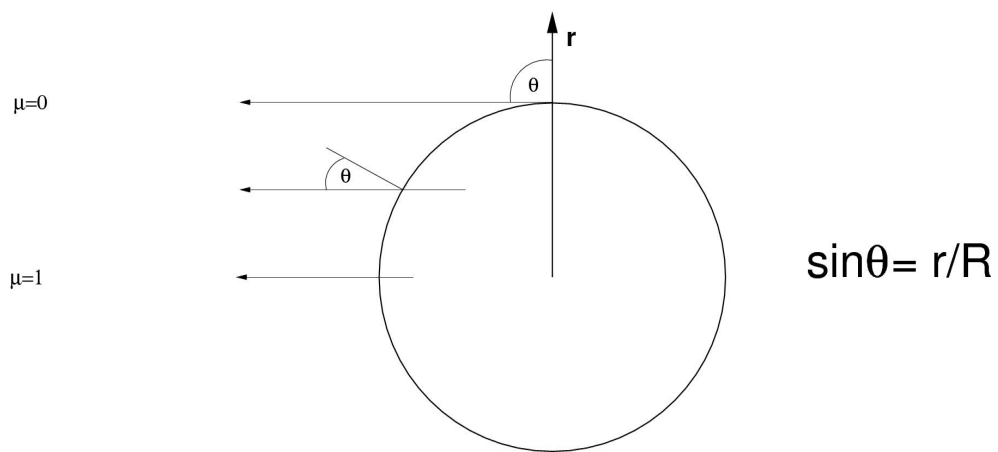
$$\begin{aligned} I(0, \mu) &= \int_0^{\infty} S(t) \frac{1}{\mu} e^{-t/\mu} dt \\ &= \frac{3}{4} F \int_0^{\infty} \left(t + \frac{2}{3} \right) \frac{1}{\mu} e^{-t/\mu} dt \\ &= \frac{3}{4} F \left(\mu + \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

Mitte-Rand-Verdunkelung der Sonne

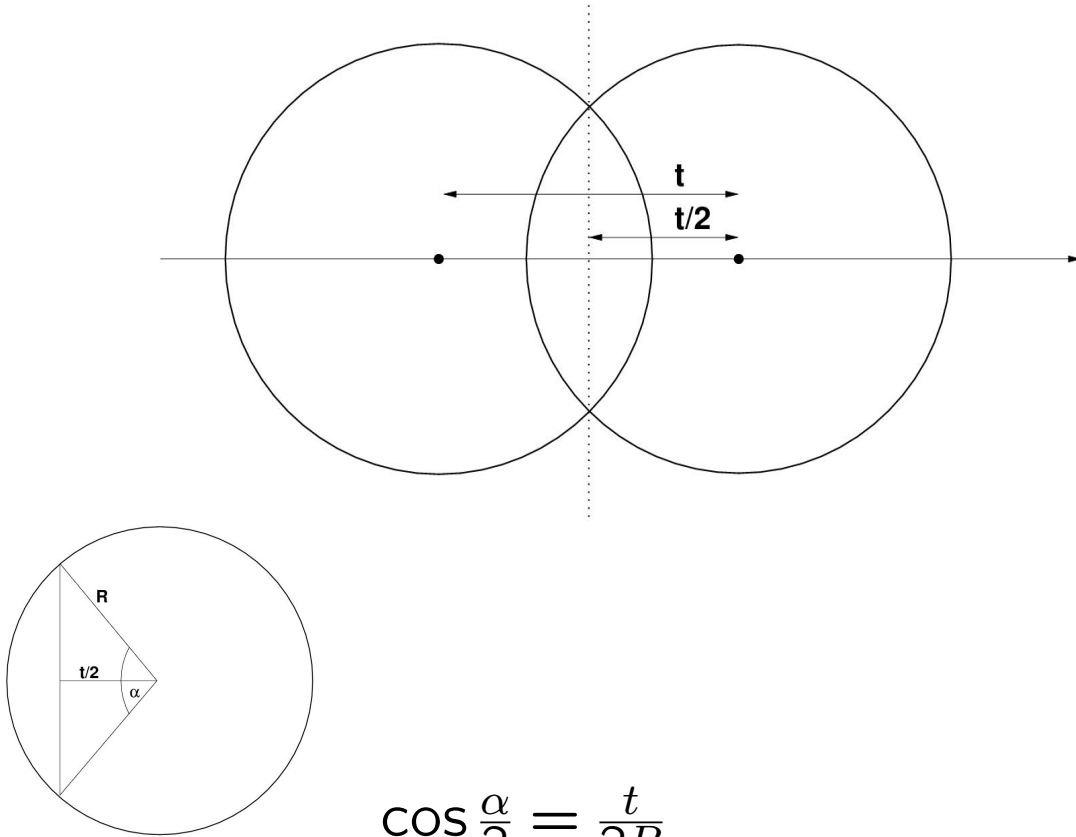


Mitte-Rand-Variation:

$$\frac{I(0, \mu)}{I(0, 1)} = \frac{\frac{3}{4}F\left(\mu + \frac{2}{3}\right)}{\frac{3}{4}F\left(1 + \frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{5}\left(\mu + \frac{2}{3}\right)$$



Lösungsansatz Bedeckungsgrad



$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{t}{2R}$$

Fläche des Kreissektors:

$$F_S = \frac{\alpha}{2} R^2$$

Fläche des halben Dreiecks:

$$F_D = \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{R^2}{4} \sin \alpha$$

Kreisabschnitt: $F = F_S - 2F_D = \frac{R^2}{2} (\alpha - \sin \alpha)$