Aufgabe 2:
Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen

I. Der innere Aufbau Weißer Zwerge

Vereinfachter Fall:
Sternaufbau sphärisch-symmetrisch (siehe Abb. 1).

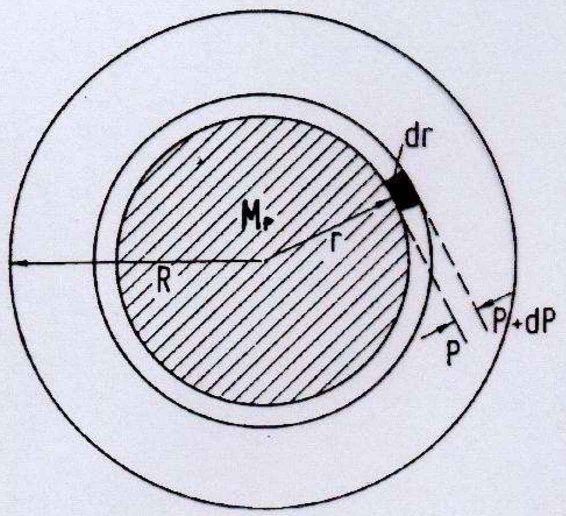

Abbildung 1: Systematischer Aufbau eines sphärisch-symmetrischen Sterns.

Aufbaugleichung

$$Volumenelement \; : \; A\,dr$$

$(A = \text{Fläche})$

$$Gravitationskraft \; : \; -G\,\frac{M(r)\,\rho(r)\,dr}{r^2}\,A$$

$$Druckkraft \; : \; A\,(P(r+dr) - P(r)) = A\,\frac{dP}{dr}\,dr$$

Gleichgewicht :

$$\frac{dP}{dr}\,A\,dr = -G\,\frac{M(r)\,\rho(r)}{r^2}\,A\,dr$$

Hydrostatische Gleichung:

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -G\,\frac{M(r)\,\rho(r)}{r^2}}$$

Massengleichung: Masse innerhalb Radius r :

$$M(r) = \int_0^r 4\pi\, r'^{\,2}\,\rho(r')\,dr'$$

($\rho(r)$: Massendichte im Abstand r)

$$\boxed{\frac{dM}{dr} = 4\pi\, r^2\,\rho(r)}$$

Zustandsgleichung :

1) Ideales Gas

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{\mu} \frac{k}{m_p} \rho T \\
k &= \mathrm{Boltzmann-Konstante} \\
\mu &= \mathrm{mittleres\ Molekulargewicht} \\
m_p &= \mathrm{Protonenmasse}
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ T muß bekannt sein (Energieerhaltung, Energietransportgleichung,...)

2) Entartetes Elektronengas (Fermi-Gas)

$$
\begin{aligned}
P &= k_i \rho^\gamma \\
\gamma &= 5/3 \qquad nicht-relativistisch \\
\gamma &= 4/3 \qquad relativistisch
\end{aligned}
$$

$\rightarrow P \neq f(T)$

Entartung tritt im Inneren der sogenannten *Weißen Zwerge* auf.

Zustandsgleichung des entarteten Elektronengases:

Zusammenhang zwischen Druck und Energie:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\Sigma\, \Delta p / \Delta t}{A} = \frac{\Sigma\, p_x\, v_x}{\Delta x\, \Delta y\, \Delta z} = \frac{N\, < p_x\, v_x >}{V}$$

rechteckige Box; $A = \Delta y\, \Delta z$; $\Delta p = 2p_x$;
Zeit zwischen zwei Stößen mit (virtueller) Wand $\Delta t = \frac{2\Delta x}{v_x}$

$$\boxed{P = \frac{N\, m\, < v_x^2 >}{V}}$$

(N: Anzahl der Teilchen; m: Teilchenmasse) nicht-relativistisch:

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}\, N\, m\, (< v_x^2 > + < v_y^2 > + < v_z^2 >) \\ &= \tfrac{3}{2}\, N\, m\, < v_x^2 > \end{aligned}$$

(wg. Isotropie: $< v_x^2 > = < v_y^2 > = < v_z^2 >$)

$$\boxed{P = \frac{2\, E}{3\, V}}$$

relativistisch:

$$\begin{aligned} E &= N\, m\, c^2 \cong 3\, N\, m\, < v_x^2 > \\ c^2 &\approx < v_x^2 > + < v_y^2 > + < v_z^2 > \equiv 3\, < v_x^2 > \end{aligned}$$

$$\boxed{P = \frac{E}{3V}}$$

Entartetes Elektronengas (Fermi-Gas):

$p_\mathrm{F} \cdot d = \hbar$ (Heisenbergsche Unschärferelation)

d = mittlerer Elektronenabstand
p_F = Fermi-Impuls

$$\begin{aligned} d &= n^{-1/3} = m^{1/3} \cdot \rho^{-1/3} \\ \Longrightarrow p_\mathrm{F} &= \hbar \cdot d^{-1} = \hbar \cdot m^{-1/3} \cdot \rho^{1/3} \end{aligned}$$

(n: Teilchendichte)

Energie der Elektronen:

$$\begin{aligned} \epsilon_F &= \frac{p_F^2}{2\,m_e} && nicht-relativistisch \\ \epsilon_F &= p_F\,c && relativistisch \end{aligned}$$

Zustandsgleichung:

nicht-relativistisch:

$$P = \frac{2E}{3V} = \frac{2}{3}\frac{\rho}{m}\,\epsilon_F = \frac{1}{3}\frac{\rho}{m\,m_e}\,p_F^2$$

$$P = \tfrac{\hbar^2}{3\,m_e\,m^{5/3}}\,\rho^{5/3} \;\rightarrow\; \boxed{P \sim \rho^{5/3}}$$

relativistisch:

$$P = \frac{E}{3V} = \frac{1}{3}\frac{\rho}{m}\,\epsilon_F = \frac{1}{3}\frac{\rho}{m}\,p_F\,c$$

$$P = \tfrac{\hbar\,c}{3\,m^{4/3}}\,\rho^{4/3} \;\rightarrow\; \boxed{P \sim \rho^{4/3}}$$