

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

**Herleitung der Kepler'schen Gesetze
aus der Beobachtung der
Galilei'schen Monde des Jupiters**

Zulassungsarbeit

Erste Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien

Christian Reichardt

Matrikelnummer: 22038266

Dr. Karl Remeis-Sternwarte Bamberg,
Astronomisches Institut, Department Physik

Betreuer: Prof. Dr. Jörn Wilms

April 2024

Erklärung zur Hausarbeit gemäß §29 (Abs.6) LPO I

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Hausarbeit von mir selbstständig verfasst wurde und dass keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt wurden. Die Stellen der Arbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen sind, sind in jedem einzelnen Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht.

Diese Erklärung erstreckt sich auch auf etwa in der Arbeit enthaltene Zeichnungen, Kartenskizzen und bildliche Darstellungen.

Ort, Datum

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation und Grundlage dieser Arbeit	1
1.2	Zur Geschichte der Kepler'schen Gesetze	2
1.3	Zweck und Zielsetzung im Rahmen des Lehramtsstudiums	3
1.4	Deduktion und Induktion im wissenschaftlichen Prozess	3
1.5	Der wissenschaftliche Prozess innerhalb dieses Projekts	4
2	Die Kepler'schen Gesetze als Zweikörperproblem	5
2.1	Relativbewegung eines Mondes um den Jupiter	5
2.1.1	Definition von Koordinaten und Kräften	6
2.1.2	Ein Mond im Zentralfeld	8
2.2	Das zweite Kepler'sche Gesetz	11
2.3	Erstes Kepler'sches Gesetz	11
2.4	Das dritte Kepler'sche Gesetz	13
2.5	Die sieben Bahnelemente für elliptische Bahnen	14
3	Die Beobachtung	17
3.1	Planung der Beobachtung	17
3.1.1	Zeitliche Rahmenbedingungen	17
3.1.2	Örtlichkeiten und Lichtverschmutzung	18
3.2	Die Beobachtungsausrüstung	18
3.2.1	Mein Entscheidungsprozess zur Wahl des Equipments	18
3.2.2	Die von mir verwendete Ausrüstung	20
3.3	Durchführung	21
3.3.1	Probeaufnahmen und Arbeitsroutine entwickeln	21
3.3.2	Besonderheiten, Tipps und Erfahrungen aus der Praxis	22
3.3.3	Die Beobachtungsreihe	22
3.4	Beschränkung durch Beobachtungsparameter	23
3.4.1	Die Funktionsweise der Kamera	23
3.4.2	Beugungsbegrenzung der Optik	24
3.4.3	Winkelauflösung der Ausrüstung	25
3.4.4	Das Seeing	25
4	Messbarkeit und didaktische Reduktion	27
4.1	Abschätzung der Beobachtbarkeit	27
4.1.1	Der geometrisch bestmögliche Beobachtungsfall	27
4.1.2	Annahme von idealen Kreisbahnen der Monde	28

4.2	Auswirkung der Planetenorte auf die Beobachtung	29
4.2.1	Die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit	29
4.2.2	Die Distanz zwischen Erde und Jupiter	30
4.2.3	Der Blickwinkel von der Erde	30
4.3	Vereinfachung der sieben Bahnelemente	32
5	Auswertung und Berechnung der Bahnparameter	35
5.1	Astrometrie der Galilei'schen Monde und die Theorie ihrer Bewegung . .	35
5.2	Ermittlung von Positionsdaten aus den Fotos	36
5.2.1	Vorbereitung der Bilder	36
5.2.2	Systematisches Auslesen der Informationen	37
5.2.3	Identifikation der Monde	40
5.3	Auswertung der Beobachtung	42
5.3.1	Modellierung der Korrekturgrößen	42
5.3.2	Bestimmung und Beurteilung der Bahnparameter	45
5.3.3	Die wahre Brennweite des Fernrohres	51
5.4	Drittes Kepler'sches Gesetz und die Masse des Jupiters	53
6	Didaktik	55
6.1	Grundlagen und Legitimation	55
6.1.1	Bildungstheorie	55
6.1.2	Schülervorstellungen	56
6.1.3	Legitimation	57
6.2	Voraussetzung des Lehrplans	58
6.2.1	Inhalte	58
6.2.2	Beurteilung	60
6.2.3	Folgerungen für die Schule	61
6.3	Das dritte keplersche Gesetz und Jupiters Masse	62
7	Schlussfolgerung	65
7.1	Weiterführung des Projekts	65
7.2	Verwendung in der Schule	66
7.3	Ein Praktikumsversuch im Studium	66
A	Tabellen	67
B	Ergänzungen und Nebenrechnungen	75
B.1	Astronomie mit dem Fernglas	75
B.2	Äußere Gravitationseinflüsse auf das Jupitersystem	75
B.3	Python Code zur Positionsbestimmung	77
B.4	Ergänzungsgrafiken zur Zuordnung der Monde	80
B.5	Der Sehinkel zwischen Mizar A und Alkor	82
C	Fotos	83
	Literaturverzeichnis	87

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation und Grundlage dieser Arbeit

Ich interessiere mich seit meiner Kindheit für Astronomie und im Alter von neun Jahren bekam ich mein erstes astronomisches Fernrohr. Von diesem Moment an war ich in der Lage, die Monde des Jupiter und die Ringe des Saturn zu sehen. Natürlich musste ich das erst lernen, aber grundlegende Astronomie ist somit für jeden zugänglich. Zu elementaren Himmelsphänomenen, die eine gewisse Faszination auslösen und noch am ehesten an die Alltagserfahrung der meisten Menschen anknüpfen, gehören wohl die Folgenden:

- Morgen- und Abendstern sind keine Sterne, sondern ein und dasselbe Objekt, die Venus, ein Planet unseres Sonnensystems.
- Mit einem einfachen Fernglas sind Jupiters vier große Monde sichtbar.
- Unter Zuhilfenahme eines einfachen astronomischen Fernrohres kann man Wolkenstrukturen auf dem Jupiter erkennen und auch die Ringe des Saturn.

Als zukünftiger Physiklehrer wird es meine Aufgabe sein, den Physikunterricht so verständlich wie möglich zu gestalten und Wissen nachhaltig zu vermitteln. Dazu gehört eine Perspektivübernahme in die Schülervorstellungen und eine gewisse Alltagsnähe (Wiesner, 2017). In der Schule werden die Kepler'schen Gesetze in erster Linie im historischen Kontext behandelt (Räde, 2024). Jupiter und seine Monde bieten die Chance, eine unserem Sonnensystem ähnliche Struktur von außen sehen zu können. Dies ist ein bedeutsamerer astrophysikalischer Sachverhalt und würde er in der Schule nicht mit Physik erlebbar gemacht, wäre es eine vertane Gelegenheit.

In dieser Arbeit soll daher auf Grundlage von Beobachtungen der vier Galilei'schen Monde des Jupiters, die mit Hilfe von einfacher Ausrüstung durchgeführt wurden, die Kepler'schen Gesetze für den Unterricht greifbar gemacht werden. Unter „modern“ verstehe ich die mathematische Formulierung von physikalischen Gesetzen, für die Isaac Newton erst nach Johannes Kepler den Grundstein gelegt hatte. Als „einfache Ausrüstung“ bezeichne ich ein Teleskop, welches so auch im Hobby- oder Amateurbereich Verwendung finden würde, und eine handelsübliche Spiegelreflexkamera, anstelle von in der Forschung verwendeten optischen Sensoren.

1.2 Zur Geschichte der Kepler'schen Gesetze

Die Gesetze der Planetenbewegung, die Johannes Kepler Anfang des 17. Jahrhunderts fand, lauten nach Demtröder (2021) wie folgt:

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. Der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich [zueinander] wie die dritten Potenzen ihrer großen Halbachsen.

Kepler bestimmte sie mithilfe detaillierter Vermessungen der Planetenpositionen am Nachthimmel von Tycho Brahe (1546–1601). Brahe maß ohne Fernrohr, mit dem Ziel, das heliozentrischen Weltbild von Nikolaus Kopernikus (1473–1543) zu widerlegen. Kepler (1571–1630) hingegen war vom kopernikanischen Weltbild fasziniert und er versuchte, die Bewegungen der Planeten in seine Interpretation von der Harmonie der Welt zu integrieren. In den Werken *Astronomia Nova* [*Neue Astronomie*] (1609) und *Harmonice Mundi* [*Harmonik der Welt*] (1619) schrieb Johannes Kepler seine Ergebnisse nieder (Orlandi, 1966, Caspar, 1990a).

Kepler entdeckte ein grundlegendes Bewegungsmuster des Zweikörperproblems und das, noch bevor Isaac Newton (1642–1727) in *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* [*Mathematische Prinzipien der Naturphilosophie*] (1687) den Grundstein für die heutige nach ihm benannte Mechanik legte (Caspar, 1990b). Das gelang Kepler rein empirisch mit Hilfe diskreter Positionen und elementarer Geometrie. Es gab weder Grunderfahrungstatsachen (Axiome) wie beispielsweise, dass eine Kraft die Ursache einer Bewegung ist, noch existierten theoretische Modelle, wie der Energiesatz oder das Gravitationsgesetz, mit der Kepler seine Theorie überprüfen konnte. In Ermangelung des Begriffes des Drehimpulses formulierte er zum Beispiel seinen Flächensatz über die Erhaltung der Bewegungsgeschwindigkeit (Caspar, 1990b). Caspar (1990b) betont, dass der Astronom bei seinen Berechnungen Ungenauigkeiten in Kauf nahm und trotzdem die Gesetze fand. Ihm war beispielsweise bewusst, dass ein mathematisches Konzept fehlte, mit dem die momentanen Bahngeschwindigkeiten in umgekehrter Proportionalität zum Radius beschrieben werden könnten. Ein weiteres Beispiel dafür ist Keplers Zerlegung der von den Planetenbahnen eingeschlossenen Flächen in Dreiecke. Er führte seine Berechnungen durch, obwohl ihm die dadurch entstehenden Abweichungen zu einer gekrümmten Bahn ebenfalls bewusst waren. Johannes Kepler war seiner Zeit voraus, denn er machte sich vor Newton darüber Gedanken, dass so etwas wie Gravitation oder Trägheit existieren mussten (Hecht, 2021). Kepler brachte sie nicht mit den Planetenbewegungen in Verbindung, jedoch ist Hecht (2021) der Meinung, dass es nur ein Frage der Zeit gewesen wäre, bis Johannes Kepler auch diesen Schritt geschafft hätte.

Im selben Zeitraum, in dem Kepler seine *neue Astronomie* veröffentlichte, entdeckten Galileo Galilei und Simon Marius praktisch zeitgleich die vier großen Jupitermonde; Marius im Dezember 1609 und Galilei im Januar 1610, indem sie mit einem, aus heutiger Sicht, einfachen Fernrohr den Jupiter beobachteten (Orlandi, 1966, Gaab, 2018). Wegen dieser Leistung sind sie heute als Galilei'sche Monde bekannt. Bei der Namensgebung

setzte sich Johannes Kepler persönlich für die Vorschläge Io, Europa, Ganymed und Kallisto von Simon Marius ein (Gaab, 2018).

1.3 Zweck und Zielsetzung im Rahmen des Lehramtsstudiums

In der Physik, wie auch in anderen Naturwissenschaften, wird die Natur mit Hilfe von Modellen beschrieben (Seiffert, 2003). Dieser modellhaften Beschreibung liegen Reduktionen und Idealisierungen zu Grunde, die mitunter sehr weit von intuitiven Erfahrungen über die Natur (Mähler, 2006) entfernt sind (Mikelskis, 2010). Diesem Problem muss sich auch der Physikunterricht in der Schule immer wieder stellen (Wiesner, 2017). In Kapitel 6 werden Einzelheiten dazu, sowie deren Bedeutung und dessen Folgen genauer ausgeführt. Kurz gesagt sollte sich der Unterricht an Schülervorstellungen, welche aufgrund von Alltagserfahrungen unterbewusst entstehen, orientieren, um eine Verbindung zwischen der erlebten Natur und den wissenschaftlichen Modellen zu schaffen.

Im Falle der Kepler'schen Gesetze schaffen die Leistungen von Galilei und Marius Abhilfe. Deren Beobachtung ist heute für jeden, der mit einem handelsüblichen Fernglas¹ ausgerüstet ist, nachzuvollziehen. Damit hat ein potenziell sehr großes Publikum die Chance, Bewegungen von Himmelskörpern selbst zu erfahren. Das ist unter Anderem auch deswegen möglich, weil diese großen Namen der Wissenschaftsgeschichte ihre Arbeit ohne moderne Technik, selbst handschriftlich festgehalten und ausgewertet haben. Darüber hinaus sind die grundlegenden physikalischen Konzepte, die für das Verstehen der Himmelsmechanik notwendig sind, Bestandteil der Schulbildung. Es sind die Begriffe wie Kraft, mechanische Energie oder Impuls. Sie entstanden erst nach Isaac Newton, in einem langen Prozess bis ins 19. Jahrhundert, und Johannes Kepler fand die nach ihm benannten Gesetze, ohne diese Grundlagen zu kennen. Heute sollte es für Menschen, mit einer gewissen schulischen Allgemeinbildung, mindestens unter Anleitung, möglich sein, dieses komplexere Thema zu verstehen. Je nach Vertiefung, kann man so auch mathematische Grundlagen praktisch anwenden, Messwerte erheben und auswerten und das Zusammenspiel von verschiedenen Disziplinen der Physik verstehen. Solches kompetenzorientiertes Lernen ist sogar erwünscht, bzw. ausdrücklich vorgesehen (Räde, 2024).

In dieser Arbeit möchte ich die nichttriviale Physik hinter den Kepler'schen Gesetzen greifbar machen und mögliche Berührungspunkte mit der Schulbildung aufzeigen. Ich möchte eine Vorlage für ein Schulprojekt bieten und die Idee anregen, das Thema in ein astronomisches Praktikum innerhalb eines Bachelorstudiums zu integrieren.

1.4 Deduktion und Induktion im wissenschaftlichen Prozess

In der Wissenschaftstheorie gibt es diese beiden übergeordneten Prinzipien der logischen Schlussfolgerung, man spricht auch von Denkrichtungen (Seiffert, 2003).

¹Eine ausführlichere Beschreibung dazu befindet sich im Anhang auf Seite 75.

Die Deduktion ist ein Prozess, bei dem man aus einfachen oder allgemeingültigen Sätzen immer kompliziertere oder speziellere herleitet. Umgekehrt vollzieht man die Richtigkeit einer speziellen Aussage nach, durch zurückverfolgen auf einfachere, bzw. schon als richtig bekannte Sätze. Man nennt das regressive Deduktion, Regression oder, wie in der Mathematik üblich, das Beweisen. Die Induktion ist eine Methode, die der gleichen Denkrichtung folgt, wie die Regression. Das Ziel ist hier von Einzelfällen auf allgemeingültige Sätze zu schließen (Seiffert, 2003).

In empirischen Wissenschaften, insbesondere der Physik, spielen diese Prinzipien eine fundamentale Rolle. Der Spezialfall ist hier ein Experiment oder ein beobachtetes Phänomen. In der theoretischen Physik werden mittels deduktiver Methoden Sätze, Gesetze oder neue Theorien hergeleitet, die dann in der Experimentalphysik durch induktives Vorgehen überprüft werden. Umgekehrt kann auch ein neuer Sachverhalt aus der Empirie hervorgehen, für den dann die Theorie entsprechende Modelle entwickelt. Mit diesem Wechselspiel überprüft sich die Physik stets selbst und das macht den Kern des wissenschaftlichen Prozesses aus (Seiffert, 2003).

1.5 Der wissenschaftliche Prozess innerhalb dieses Projekts

In dieser Arbeit werde ich, beginnend in Kapitel 2, die Theorie hinter den Kepler'schen Gesetzen beschreiben und sie aus grundlegenden physikalischen Prinzipien herleiten. In Kapitel 3 beschreibe ich eine Beobachtungsmethode mit handelsüblicher Amateurausrüstung, damit die Experimentiermethode möglichst alltagsnah ist. Die dabei aufgenommenen Bilder werden der Gewinnung von Messwerten dienen, mit deren Hilfe eine Bewegung rekonstruiert werden soll. Auf Besonderheiten aus der Beobachterperspektive werde ich in Kapitel 4 eingehen und diskutieren, was von der Beobachtung zu erwarten ist. Die Auswertung der Fotos und die Gewinnung physikalischer Gesetzmäßigkeiten beschreibe ich in Kapitel 5. Unter anderem werden dabei theoretische Überlegungen durch empirische Untersuchungen überprüft. Strukturell geht es mir hier genau um das Wechselspiel zwischen Deduktion und Induktion, um damit die Meta-Ebene der Wissenschaft deutlich zu machen. Anschließend werde ich in Kapitel 6 die didaktischen Herausforderungen diskutieren und eine Eignung für die Umsetzung dieses Projektes in der Schule oder im Physikstudium feststellen.

Kapitel 2

Die Kepler'schen Gesetze als Zweikörperproblem

Ich beginne mit einer theoretischen Herleitung der Gesetze der Planetenbewegung. Ausgangspunkt wird die Newton'sche Mechanik sein, denn sie wird in der Schule gelehrt (Räde, 2024). Dazu verwende ich, sofern nicht anders vermerkt, die Konzepte von Wolfgang Demtröder aus *Experimentalphysik 1 – Mechanik und Wärme* und die aus dem *Grundkurs Theoretische Physik 1 – Klassische Mechanik und mathematische Vorbereitungen* von Wolfgang Nolting (Demtröder, 2021, Nolting, 2018).

Strukturell werde ich anders vorgehen, als die Lehrbücher. Ich werde nicht auf zuvor einzeln eingeführte physikalische Sachverhalte verweisen, sondern sie im Verlauf der Herleitung plausibel integrieren. Parallel dazu werden Bemerkungen zur Interpretation und Anschaulichkeit vorgenommen. Das hilft beim Verständnis und soll einer späteren Anhäufung von Querverweisen vorbeugen.

Am Ende des Kapitels betrachte ich, im Hinblick auf die Beobachtung, eine Verallgemeinerung der Keplerbahn im dreidimensionalen Raum.

2.1 Relativbewegung eines Mondes um den Jupiter

Die Ausgangslage für die Planetenbewegung sind die Sonne und ein Planet, die sich umeinander bewegen. In dieser Arbeit behandle ich den äquivalenten Fall, bei dem sich einer der Monde Io, Europa, Ganymed oder Kallisto um den Jupiter bewegt und werde daher auch diese Terminologie verwenden.

Zunächst nehme ich an, dass es sich hier um Punktmassen handelt. Das Gravitationspotential und die Schwerkraft außerhalb von Vollkugeln verhalten sich wie jene von Punktmassen (Demtröder, 2021). Sterne, Planeten und die hier relevanten Monde sind zwar keine perfekten Kugeln, aber nahe genug dran, sodass sich die von den Himmelskörpern erzeugten Felder und Potentiale über die großen Entfernungen im All praktisch nicht von denen von Kugeln unterscheiden.

2.1.1 Definition von Koordinaten und Kräften

Ich definiere die Koordinaten \vec{s}_1, \vec{s}_2 der Massen m_1, m_2 und $M := m_1 + m_2$ bezeichne ich die Gesamtmasse. Für die Schwerpunktskoordinate gilt

$$\vec{S} = \frac{m_1 \vec{s}_1 + m_2 \vec{s}_2}{M}. \quad (2.1)$$

Weiterhin sei $\vec{r} = \vec{s}_1 - \vec{s}_2$ die Relativkoordinate des Mondes bezüglich seines Planeten und Körper 2 dabei stets der Jupiter. $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ zerfällt in die Relativkoordinaten der beiden Körper im Bezug auf den Schwerpunkt.

Vektoraddition ergibt

$$\vec{s}_1 = \vec{s}_2 + \vec{r}; \quad \vec{s}_2 = \vec{s}_1 - \vec{r} \quad \text{und} \quad \vec{r}_1 = \vec{s}_1 - \vec{S}; \quad \vec{r}_2 = \vec{s}_2 - \vec{S} \quad (2.2)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{s}_1 - \frac{1}{M}(m_1 \vec{s}_1 + m_2 \vec{s}_2) = \vec{s}_1 - \frac{1}{M}(m_1 \vec{s}_1 + m_2 \vec{s}_1 - m_2 \vec{r}) = \vec{s}_1 - \frac{M}{M} \vec{s}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ &= \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{s}_2 - \frac{1}{M}(m_1 \vec{s}_1 + m_2 \vec{s}_2) = \vec{s}_2 - \frac{1}{M}(m_1 \vec{s}_2 + m_1 \vec{r} + m_2 \vec{s}_2) = \vec{s}_2 - \frac{M}{M} \vec{s}_2 - \frac{m_1}{M} \vec{r} \\ &= -\frac{m_1}{M} \vec{r} \end{aligned} \quad (2.3)$$

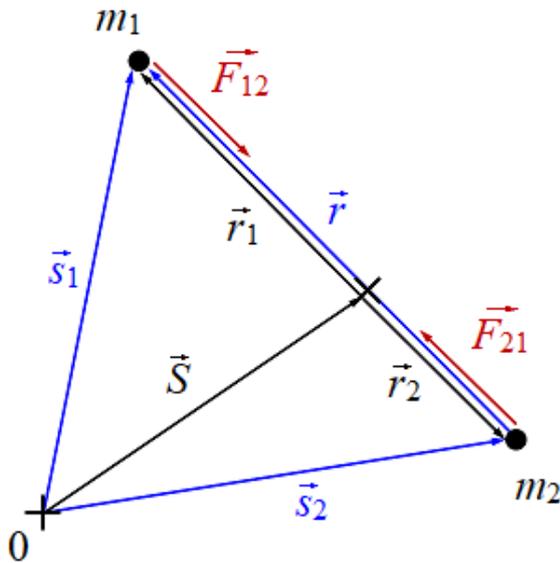


Abbildung 2.1: Absolut- und Relativkoordinaten zweier Massen und deren Schwerpunkt im Zweikörperproblem

Mit Hilfe der Gleichungen (2.3) lässt sich die Relativbewegung bei Bedarf auf die Bewegungen der einzelnen Körper zurückführen.

Zur Bestimmung der Bewegung betrachte ich zunächst die Bewegungsgleichung der Absolutkoordinaten $m_1 \ddot{\vec{s}}_1 = \vec{F}_1^{\text{tot}}$ und $m_2 \ddot{\vec{s}}_2 = \vec{F}_2^{\text{tot}}$. Dabei ist \vec{F}_i^{tot} mit $i \in \{1,2\}$ die Summe aller Kräfte auf Körper i . Sie lässt sich zerlegen in $\vec{F}_i^{\text{tot}} = \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{\text{ext}}$ mit $j \in \{1,2\}$ und $j \neq i$. Dies sei die Summe der auf ihn wirkenden externen Kräfte \vec{F}_i^{ext} und die von Körper j ausgeübte Kraft \vec{F}_{ij} . Hier berücksichtige ich direkt, dass es sich bei Letzterer nur um die Gravitation zwischen den beiden Himmelskörpern handelt. Diese ist mit entsprechend umgekehrtem Vorzeichen für beide identisch:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \\ \vec{F}_{21} &= G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\vec{F}_{12}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

mit G als Gravitationskonstante. Für die Relativbewegung gilt

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{s}}_1 - \ddot{\vec{s}}_2 = \frac{1}{m_1} \vec{F}_{12} + \frac{1}{m_1} \vec{F}_1^{\text{ext}} - \frac{1}{m_2} \vec{F}_{21} - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2^{\text{ext}} \\ &= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12} + \frac{1}{m_1} \vec{F}_1^{\text{ext}} - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2^{\text{ext}}\end{aligned}\quad (2.5)$$

um im Falle eines abgeschlossenen Systems ist $\vec{F}^{\text{ext}} = 0$ und es reduziert sich die Gleichung zu

$$\ddot{\vec{r}} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12} =: \frac{1}{\mu} \vec{F}_{12}, \quad (2.6)$$

wobei μ die reduzierte Masse ist. Das Zweikörperproblem wird dadurch zu einem effektiven Einkörperproblem. Es wird zur Bewegung der relativen Koordinate \vec{r} eines Mondes mit reduzierter Masse μ im Kraftfeld \vec{F}_{12} mit Ursprung in \vec{s}_2 , der Jupiterkoordinate.

Jupiter ist also stets das Zentrum der Kraft und in Ermangelung an ausgezeichneten Richtungen in Weltall kann in Kugelkoordinaten das Problem auf eine Dimension reduziert werden. Das ist ein Zentralkraftfeld und ich notiere

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12}(\vec{r}) &= - |\vec{F}_{12}| \vec{e}_r := f_{12}(r) \vec{e}_r = \vec{F}_{12}(r), \text{ mit} \\ f_{12}(r) &:= -G \frac{m_1 m_2}{r^2} = -G \frac{\mu M}{r^2}.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Im weiteren Verlauf werde ich auf die Indizes bei der Kraft verzichten.

Eine Diskussion zur Abgeschlossenheit des Systems

Ich werde nun klären, ob das Jupitersystem¹ als abgeschlossen gelten kann, also ob die externen Kräfte praktisch vernachlässigbar sind.

Als Gegenerklärung sei gesagt, dass das natürlich nicht der Fall ist, diverse andere Himmelskörper üben durch Gravitation einen Einfluss aus, welche sich als Bahnstörungen äußern. Selbst der Einfluss der Galilei'schen Monde untereinander resultiert in den Resonanzen zwischen ihnen. Die Detaillierte Aufarbeitung dessen ist Gegenstand vieler anderer Arbeiten und würde daher nicht nur den Rahmen dieser sprengen, sondern auch an ihrem Ziel vorbeiführen. Als Beispiel möchte ich *Introducing gravitational resonances from simple observations of Jupiter's Galilean satellites* [Einführung in die gravitativen Resonanzen von Jupiters Galilei'schen Monden mit einfachen Beobachtungen] (Ordóñez-Etxeberria et al., 2016) aus dem *European Journal of Physics* nennen.

Für eine quantitative Beurteilung führe ich eine konservative Schätzung mit Daten der NASA durch. Dazu vergleiche ich die Summanden aus Gleichung (2.5). Als Quotienten der Kräfte mit den dazugehörigen Massen handelt es sich quasi um Beschleunigungen, die ich hier als Wirkungen bezeichne. Als Kandidaten für einen Vergleich dieser Wirkungen habe ich die Sonne und den Saturn ausgewählt. Die Sonne, nicht nur weil sie die dominante Masse im Sonnensystem ist, sondern auch, weil sich Jupiter selbst in ihrem Schwerfeld bewegt. Saturn ist Jupiters Nachbar und bezüglich Masse auf Rang zwei unter den Planeten. Nach der Rechnung, welche sich im Anhang auf Seite 75 befindet, stellt sich zunächst heraus, dass die Wirkungen zwischen Jupiter und Kallisto die schwächste im

¹gemeint sind Jupiter und seine vier Galilei'schen Monde

Jupitersystem ist. Verglichen mit der Wirkungen von der Sonne auf Jupiter und Kallisto ist sie etwa 145 mal stärker. Das sind zwei Größenordnungen und die Wirkungen des Saturn auf beide Himmelskörper wird noch um weitere drei übertroffen. Damit zeigte sich auch, dass beide potentielle Störkandidaten jeweils eine ähnliche Wirkung auf beide Himmelskörper ausüben. Ich folgere daraus, dass ihr Einfluss praktisch vernachlässigbar ist und ich guten Gewissens von einem abgeschlossenen System ausgehen kann. Es gilt somit Gleichung (2.6).

Die Integration nach der Zeit

Für eine zeitliche Beschreibung des Ortes, also der Bahnkurve, muss Gleichung 2.6 zweimalig nach der Zeit integriert werden. Im günstigsten Fall erhalte ich direkt das Ergebnis. Die Gleichung

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{\mu} \vec{F} = -G \frac{M}{r^2} \vec{e}_r \cong r^2 \ddot{\vec{r}} + GM \vec{e}_r = 0. \quad (2.8)$$

ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, nicht linear und enthält eine vektorwertige Funktion. Sie ist nicht ohne Weiteres integrierbar.

2.1.2 Ein Mond im Zentralfeld

Bei der Lösung des Problems bediene ich mich Hilfs- und Erhaltungsgrößen, wie Energie und Drehimpuls. Die Energie ist in konservativen Kraftfeldern eine Erhaltungsgröße, sowie der Drehimpuls in Zentralfeldern bezüglich des Zentrums. Ich umgehe damit die direkte zeitliche Integration der Bewegungsgleichung.

Zentralkräfte der Form $\vec{F} = f(r)\vec{e}_r$ sind stets konservativ und gemäß Gleichung (2.7) ist genau das hier der Fall. Ich weise die Bedingung, dass für konservative Kraftfelder die Rotation verschwindet, kurz nach. Es gilt

$$\text{rot } \vec{F}(r) = \nabla \times \vec{F}(r) = \begin{pmatrix} \partial_r \\ r^{-1} \partial_\vartheta \\ (r \sin \vartheta)^{-1} \partial_\varphi \end{pmatrix} \times -G \frac{\mu M}{r^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.9)$$

dabei ist Nabla ∇ in Kugelkoordinaten (Bronstein, 1999).

Damit kann ich ein Potenzial V definieren, für das $\vec{F}(r) = -\text{grad } V(r)$ gilt.

Das Gravitationspotential

Zur Bestimmung dessen integriere ich entlang eines Weges, anstatt über die Zeit. Das entspricht der geleisteten Arbeit oder mechanischen Energie. Die Interpretation stammt von der Kraftanstrengung, die beim Abschreiten eines Weges im Kraftfeld nötig ist. Ich rechne

$$\begin{aligned} V(r) &= \int_r^\infty \vec{F}(\tilde{r}) d\tilde{r} + \underbrace{V(\infty)}_{=:0} = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} -G\mu M \int_r^{r_0} \frac{1}{\tilde{r}^2} d\tilde{r} = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} -G\mu M \left[-\frac{1}{\tilde{r}} \right]_r^{r_0} \\ &= -G \frac{\mu M}{r}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Als kurzen Beweis berechne ich:

$$\begin{aligned}
 -\text{grad } V(r) &= -\vec{e}_r \frac{\partial V}{\partial r} - \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} - \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\vec{e}_r \cdot G \frac{\mu M}{r^2} - \vec{e}_\vartheta \cdot 0 - \vec{e}_\varphi \cdot 0 \\
 &= -G \frac{\mu M}{r^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{F}(r) .
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Dem Potential wohnt die Idee inne, dass es die Arbeit oder Energie repräsentiert, die notwendig ist, um das Objekt an die entsprechende Position im Kraftfeld zu bewegen. Genauer gesagt ist es hier die Energie, um das Objekt aus dem Kraftfeld heraus zu bewegen, da eine anziehende Kraft vorliegt und Integrationsgrenzen stets von klein nach groß geordnet sind. Ich halte mich dabei an die Konvention, dass das Potential im Unendlichen Null ist.

In der Physik, insbesondere der Thermodynamik, wird von freiwerdender Energie oder vom System geleisteter Arbeit gesprochen, wenn die Potentialdifferenz negativ ist. Umgekehrt wird am System Arbeit geleistet oder Energie zugeführt, wenn die Potentialdifferenz positiv ist. Deshalb möchte ich zum negativen Vorzeichen, welches sich aus der Konvention ergibt, das Folgende anmerken. Bei Bewegungen in Kraftfeldern führt es dazu, dass bei Verlassen eines Feldes mit anziehender Kraft die Energie positiv wird. Das ist gerade konsistent mit der realen Erfahrung, dass Arbeit, z.B. mit Hilfe von Raketentriebwerken, geleistet werden muss, um ein Gravitationsfeld zu verlassen.

Die kinetische Energie

Nun integriere ich entlang eines beliebigen nicht geschlossenen Weges, dazu ist

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \mu \ddot{\vec{r}} d\vec{r} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mu \ddot{\vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt} dt . \tag{2.12}$$

Ich habe den Weg nach der Zeit parametrisiert und im Integral das vektorwertige infinitesimale Wegstück durch eine zeitliche Zerlegung des Weges substituiert. Daraus folgt eine gewisse Konsistenz zum ursprünglichen Vorhaben der zeitlichen Integration. Die Änderung des Ortes nach der Zeit, die Momentangeschwindigkeit $\vec{v} := \dot{\vec{r}} = d_t \vec{r}$, taucht ebenfalls auf. Damit kann ich die Integrale

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} \mu \ddot{\vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \mu \ddot{\vec{r}} \dot{\vec{r}} dt = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 \Big|_{t_2} - \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 \Big|_{t_1} = \frac{1}{2} \mu \left(\vec{v}(t_2)^2 - \vec{v}(t_1)^2 \right) \\
 &= \Delta E_{\text{kin}} , \text{ mit der kinetischen Energie}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$E_{\text{kin}} := \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2 , \tag{2.14}$$

auswerten. Auf der rechten Seite von (2.12) ist der Integrand die nach der Zeit abgeleitete hypothetische Stammfunktion der Kraft. Diese bezeichne ich ohne tieferen Sinn als \mathcal{F} .

Unter Verwendung von (2.10) gilt

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{F}(\vec{r}) \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \mathcal{F}(\vec{r}) = \frac{d}{dt} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \frac{d}{dt} (V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)) \quad \text{und} \\ \vec{F}(\vec{r}) \dot{\vec{r}} &= \mu \ddot{\vec{r}} \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 \right) = \frac{d}{dt} E_{\text{kin}} .\end{aligned}\tag{2.15}$$

Beim Gravitationspotential habe ich in einem Nebensatz schon erwähnt, dass die Potentialdifferenz einer Arbeit bzw. Energie entspricht, das ist nun noch einmal besonders deutlich geworden. Weiterhin habe ich damit gezeigt, was generell für konservative Kraftfelder gilt, nämlich Energieerhaltung auf geschlossenen Wegen. Auf solchen Bahnen sind \vec{r}_1 und \vec{r}_2 identisch und dadurch wird die Potentialdifferenz, und daher die Änderung der kinetischen Energie, Null.

Der Drehimpuls

Liegt bei der Bewegung eines Körpers der Bezugspunkt außerhalb der Bahn, wie bei der Bewegung eines Mondes um seinen Planeten, so existiert definitionsgemäß ein Drehimpuls. Dieser lautet $\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p} = \mu(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$ mit dem Impuls $\vec{p} := \mu \dot{\vec{r}} = \mu \vec{v}$. Der Betrag ist $|\vec{L}| = |\vec{r}| |\vec{p}| \sin \alpha$ (Bronstein, 1999), mit α als Winkel zwischen den Vektoren.

Die Bahnkurve $\vec{r} = \vec{r}(t)$ und damit das Verhalten der Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ sind noch nicht bekannt. Ich betrachte die zeitliche Veränderung des Drehimpulses und erhalte

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \vec{L} &= \frac{d}{dt} \mu(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \mu(\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) = \mu(\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) \\ &= \vec{M}\end{aligned}\tag{2.16}$$

das Drehmoment $\vec{M} := \vec{r} \times \vec{F}$. Im Zusammenhang damit, dass eine Kraft die Änderung eines Impulses verursacht, ist das beim Analogon der Rotation sofort plausibel. In Zentralfeldern gilt $\vec{r} \parallel \vec{F}$, daher ist das Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ und daraus folgt unmittelbar die Erhaltung des Drehimpulses.

Aus der Definition des Drehimpulses in Kombination mit dessen Konstanz kann ich für die Bahnkurve sofort schlussfolgern, dass der Drehimpulsvektor \vec{L} stets senkrecht zum Ortsvektor \vec{r} ist. Weiterhin ändert der Drehimpuls nie die Richtung und das Skalarprodukt für alle Orte auf der Bahnkurve $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$ impliziert eine Ebenengleichung für eine Ebene senkrecht zum Drehimpuls. Diese geht durch den Koordinatenursprung, den ich zuvor mit Jupiter, als Zentrum der Kraft, festgelegt habe. Die gesamte Bewegung findet also in dieser Ebene statt und im Zusammenhang mit der kinetischen Energie aus dem vorherigen Abschnitt ergibt sich eine geschlossene Bahn.

2.2 Das zweite Kepler'sche Gesetz

Zur Formulierung des zweiten Kepler'schen Gesetzes verwende ich die mathematischen Interpretation über den Betrag des Vektorproduktes. Dabei handelt es sich um den Flächeninhalt des Parallelogramms, welches die beiden bildenden Vektoren aufspannen. Ausgangspunkt ist der Drehimpuls und ich betrachte die skalare Multiplikation mit einem infinitesimalen Zeitintervall, also den lokalen zeitlichen Verlauf.

In Abbildung 2.2 habe ich, obwohl anders benannt, den Ort $\vec{r}' := \vec{r}(t + dt)$ nach einer bestimmten Zeitdifferenz Δt visualisiert. Die strikte Einhaltung dieser Differenz hätte zur Folge, dass der von den Vektoren aufgespannte Flächeninhalt nicht den krummlinigen Abschnitt zwischen der Bahnkurve und $d\vec{r}$ enthält. Im Grenzfall $\Delta t \rightarrow dt$ wird die Bahnkurve hingegen beliebig genau durchlaufen und die gesamte Fläche überstrichen.

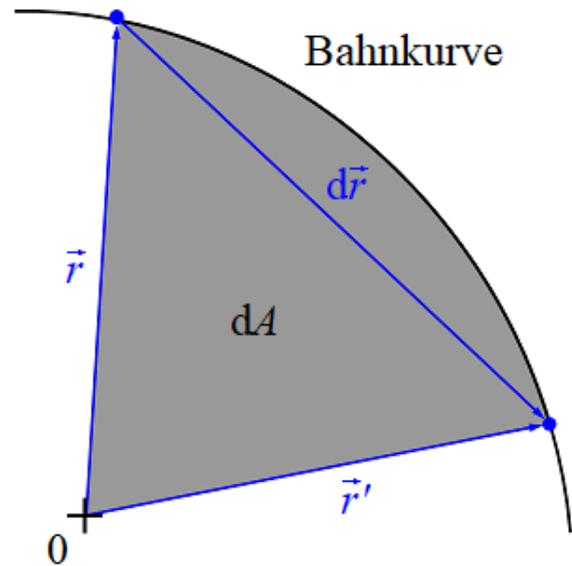


Abbildung 2.2: Das vom Ortsvektor überstrichene Flächenelement

Die dreieckige Fläche zwischen \vec{r} , $d\vec{r}$ und \vec{r}' ist genau die Hälfte des von \vec{r} und \vec{r}' aufgespannten Parallelogramms und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \vec{L} dt &= (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) dt = \vec{r} \times \underbrace{\dot{\vec{r}} dt}_{=d\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{r} + \vec{r} \times d\vec{r} = \vec{r} \times (\vec{r} + d\vec{r}) \\ &= \vec{r} \times \vec{r}' \\ 2 \cdot dA &= |\vec{r} \times \vec{r}'| \Leftrightarrow dA = \frac{1}{2\mu} |\vec{L}| dt \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2\mu} |\vec{L}| dt = \frac{1}{2\mu} |\vec{L}| \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{1}{2\mu} |\vec{L}| (t_2 - t_1).$$

Die zeitliche Änderung des Flächeninhaltes ist proportional zum Drehimpuls und dieser ist für die gesamte Bahn konstant. Für zwei beliebige gleichgroße Zeitintervalle lautet daher das zweite Kepler'sche Gesetz äquivalent im Jupitersystem:

Der Fahrstrahl vom Jupiter zum Mond überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

2.3 Erstes Kepler'sches Gesetz

Mechanische Energie und Drehimpuls habe ich auf deduktivem Weg als zeitliche Erhaltungsgrößen identifiziert. Die Bewegung im Raum reduziert sich, aufgrund der Kon-

stanzheit des Drehimpulses, auf eine Bewegung in einer Ebene. Ich vereinfache die Kugelkoordinaten auf Polarkoordinaten in r und φ . Wollte ich die Richtung des Drehimpulses weiterhin mit berücksichtigen, kann ich auch Zylinderkoordinaten mit $\vec{L} \sim \vec{e}_z$ verwenden. An dieser Stelle möchte ich anmerken, dass das nur für jeden Mond einzeln gilt. Die Inklinationen der Bahnen unterscheiden sich nämlich voneinander (Williams, 2023).

Ausgehend von Gleichung (2.15) definiere ich eine Gesamtenergie $E = E_{\text{kin}} + V$ eines Teilchens (Mond) im zentralen Schwerfeld (um Jupiter). Diese ist konstant. Die kinetische Energie zerlege ich gemäß radialem und tangenialem Anteil der Geschwindigkeit in $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\mu(v_r^2 + v_\varphi^2)$ (2.14). Für den Drehimpuls gilt $\vec{L} = \mu(\vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\varphi)) = \mu(\vec{r} \times \vec{v}_\varphi)$, denn $\vec{r} \parallel \vec{v}_r$. Der Betrag ist somit $L := |\vec{L}| = \mu|\vec{r}||\vec{v}_\varphi| \sin(\vec{r}, \vec{v}_\varphi) = \mu r v_\varphi$. Außerdem gilt $v_\varphi = r\dot{\varphi}$, denn die Änderung des Winkels im Abstand r entspricht genau der Tangentialgeschwindigkeit.

Mit Hilfe des Drehimpulses ersetze ich v_φ und für den Energiesatz gilt dann

$$E = \frac{1}{2}\mu v_r^2 + \frac{1}{2}\mu v_\varphi^2 + V = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - G\frac{\mu M}{r}, \quad (2.18)$$

dabei ist $r = r(t) = |\vec{r}(t)|$ nun der Abstand vom Zentrum (Jupiter) und nicht mehr die vektorwertige Funktion des Ortes. Im Gegensatz zu Gleichung (2.8) enthält diese Differentialgleichung nun Erhaltungsgrößen, die mit Hilfe messbarer Größen bestimmbar sind. Es sind auch keine vektorwertigen Funktionen mehr enthalten.

Zur Lösung substituiere ich $s := r^{-1}$, eliminiere damit die gebrochen-rationalen Abstände und aus der Funktion $E(r)$ zur Gesamtenergie wird $E(s)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\varphi} &= \frac{d}{dt}(r^{-1}) \frac{dt}{d\varphi} = -r^{-2} \dot{r} \frac{1}{\dot{\varphi}} = -\frac{\dot{r}}{r^2 \frac{L}{\mu r^2}} = -\frac{\dot{r} \mu}{L} \\ \Leftrightarrow \dot{r} &= -\frac{ds}{d\varphi} \frac{L}{\mu}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Gleichung (2.18) wird damit zu

$$E(s) = \frac{L^2}{2\mu} \left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^2 + \frac{L^2 s^2}{2\mu} - G\mu M s \quad (2.20)$$

und nach φ abgeleitet ergibt es die Differentialgleichung

$$0 = \frac{L^2}{\mu} \left(\frac{d^2 s}{d\varphi^2} + s \right) - G\mu M \Leftrightarrow s^{(2)} + s = \frac{G\mu^2 M}{L^2}. \quad (2.21)$$

Das ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Deren Lösung ist die Linearkombination aus homogener $s_{\text{hom}}(\varphi)$ und partikulärer $s_{\text{part}}(\varphi)$ Lösung. Aufgrund der Konstanz der Inhomogenität habe ich die partikuläre Lösung schnell mit $s_{\text{part}}(\varphi) = G\mu^2 M L^{-2}$ gefunden, denn $s_{\text{part}}^{(2)}(\varphi) = 0$ und $s_{\text{part}}(\varphi) + 0 = G\mu^2 M L^{-2}$. Die Homogene Lösung bestimme ich mit Hilfe eines Exponentialansatzes, dazu berechne ich zunächst die Nullstellen der charakteristischen Gleichung $P(\chi) = \chi^2 + 1$. Diese sind $\chi = \pm i$, also komplex und für den Exponentialansatz ergibt sich

$$s_{\text{hom}}(\varphi) = e^{0\varphi}(A \sin 1\varphi + B \cos 1\varphi) = A \sin \varphi + B \cos \varphi, \quad (2.22)$$

wobei ich die Koeffizienten A und B aus Rand- oder Anfangswerten bestimmen werde (Bronstein, 1999). Das Koordinatensystem wähle ich so, dass bei $\varphi = 0$ der Mond dem Jupiter am nächsten ist, also im Perijovum² steht. Der Abstand r ist somit minimal und s maximal, daraus folgt für $s^{(1)}(\varphi) = 0$ und $s^{(2)}(\varphi) < 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} s^{(1)}(\varphi)|_{\varphi=0} &= A \cos \varphi - B \sin \varphi|_{\varphi=0} = A \Rightarrow A = 0 \\ s^{(2)}(\varphi)|_{\varphi=0} &= -A \sin \varphi - B \cos \varphi|_{\varphi=0} = -B \Rightarrow B > 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

und die Differentialgleichung wird gelöst von

$$s(\varphi) = B \cos \varphi + \frac{G\mu^2 M}{L^2}. \quad (2.24)$$

Da ich s als den Kehrwert von r eingeführt habe, gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{r(\varphi)} &= \frac{BL^2 \cos \varphi + G\mu^2 M}{L^2} \\ \Leftrightarrow r(\varphi) &= \frac{L^2}{BL^2 \cos \varphi + G\mu^2 M} = \frac{\frac{L^2}{G\mu^2 M}}{1 + \frac{BL^2}{G\mu^2 M} \cos \varphi}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

was der Gleichung einer Ellipse $r(\varphi) = p(1 + \varepsilon \cos \varphi)^{-1}$ (Bronstein, 1999) in Polarkoordinaten entspricht. Dabei sind p mit $p^{-1} = G\mu^2 M L^{-2} = b^{-2}a$ der Halbparameter³ (Bronstein, 1999) und ε die numerische Exzentrizität. Sie hängen mit dem Parameter $B = \varepsilon p^{-1} = \varepsilon G\mu^2 M L^{-2}$ zusammen. Das erste Kepler'sche Gesetz lautet äquivalent im Jupitersystem:

Die Monde bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt der Jupiter steht.

2.4 Das dritte Kepler'sche Gesetz

Ausgehend vom zweiten Kepler'schen Gesetz ist aufgrund der Drehimpulserhaltung die überstrichene Fläche des Verbindungsvektors stets konstant. Nach dem ersten Kepler'schen Gesetz handelt es sich bei einem vollen Umlauf um eine Ellipse. Mit der Umlaufzeit T , a als große und b als kleine Halbachse gilt nach Gleichung (2.17) $A = \pi ab = TL(2\mu)^{-1}$. Das forme ich nach $T^2 a^{-3}$ um und erhalte

$$\begin{aligned} \frac{T}{a} &= \frac{\pi 2\mu b}{L} && \left| \left(\right)^2 \right| \cdot \frac{1}{a} \\ \frac{T^2}{a^3} &= \frac{\pi^2 4\mu^2 b^2}{L^2 a} = \frac{\pi^2 4\mu^2}{L^2} p = \frac{\pi^2 4\mu^2}{L^2} \frac{L^2}{G\mu^2 M} \\ \frac{T^2}{a^3} &= \frac{4\pi^2}{GM} = \text{konst.} \\ \Rightarrow \frac{T_i^2}{a_i^3} &= \frac{T_j^2}{a_j^3} \Leftrightarrow \frac{T_i^2}{T_j^2} = \frac{a_i^3}{a_j^3} \end{aligned} \quad (2.26)$$

²-jovum, lat. beim Jupiter: die Periapsis bezüglich des Jupiters

³Die Hälfte einer Sehne, die durch einen Brennpunkt und senkrecht zur Hauptachse verläuft.

für zwei Monde i und j . Damit lautet das dritte Kepler'sche Gesetz äquivalent im Jupitersystem:

Die Quadrate der Umlaufzeiten der Monde verhalten sich zueinander wie die dritten Potenzen ihrer großen Halbachsen.

2.5 Die sieben Bahnelemente für elliptische Bahnen

Die Beschreibung einer elliptischen Bahn, gemäß des ersten Kepler'schen Gesetzes, genügt nicht, um anhand von Beobachtungen eine Bahn zu ermitteln oder aus gegebenen Parametern eine Bewegung zu rekonstruieren. Möglich wäre das nur, wenn der Beobachter orthogonal von oben⁴ auf die Bahnebene schaut und das ist in der Regel nicht der Fall. Deshalb werde ich einige zusätzliche geometrische Größen betrachten.

Für die Bestimmung von Planetenörtern im Sonnensystem sind sieben Bahnelemente definiert. Nach Montenbruck (2005) handelt es sich dabei um

1. die große Halbachse $a = \overline{MP} = \overline{MA}$,
2. die lineare Exzentrizität $e = \overline{MZ} = \overline{MF}$ (numerische Exzentrizität: $\varepsilon = ea^{-1}$),
3. die Umlaufzeit oder Periode T und
4. der Zeitpunkt des Periheldurchgangs t_0 . Außerdem
5. die Inklination i , also der Neigungswinkel der Bahn zur Bezugsebene,
6. der Winkel zwischen aufsteigendem Knoten und Periapsis $\omega = \angle KZP$, welchen ich kurz Periapsiswinkel nenne und
7. die Länge des aufsteigenden Knotens $\Omega = \angle BZK$. Es ist der Winkel, mit etwas irreführendem Namen, zwischen der Sichtlinie zum Beobachter und dem Halbparameter zum Frühlingspunkt, ich nenne ihn kurz Knotenwinkel.

Die ersten vier Bahnelemente a , e , T und t_0 legen den Ort innerhalb der Bahn fest und definieren somit die Bahn selbst (Montenbruck, 2005). Sie stehen im direkten Zusammenhang mit dem ersten Kepler'schen Gesetz und ich bezeichne sie kurz als innere Bahnelemente. Zur Verdeutlichung dessen, ist in Abbildung 2.3 der Abstand r zum Zentralkörper und der Winkel φ von der Periapsis eingezeichnet.

Die verbleibenden drei Bahnelemente, welche auch als Lageelemente bezeichnet werden (Montenbruck, 2005), beschreiben die Orientierung der Bahn relativ zum Beobachter. Sie haben den Zweck, das System der Bahnebene in das heliozentrische System umzurechnen (Montenbruck, 2005). Dabei ist Z die Sonne, γ zeigt auf die Erde und die Bezugsebene ist die Ekliptik.

Die Definition dieser Größen lässt eine weitere Verallgemeinerung zu, Montenbruck (2005) führt einige Beispiele verschiedener Bezugssysteme und die dafür nötigen Umrechnungen auf. Die Bezugsebene und der aufsteigende Knoten sind frei wählbar, müssen aber stets angegeben werden (Montenbruck, 2005). Das kann ebenso im Jupitersystem angewendet werden, dabei ist Z der Jupiter und die Bezugsebene seine Äquatorialebene.

⁴Von oben bezeichnet hier, dass der Drehimpulsvektor auf den Beobachter zeigt.

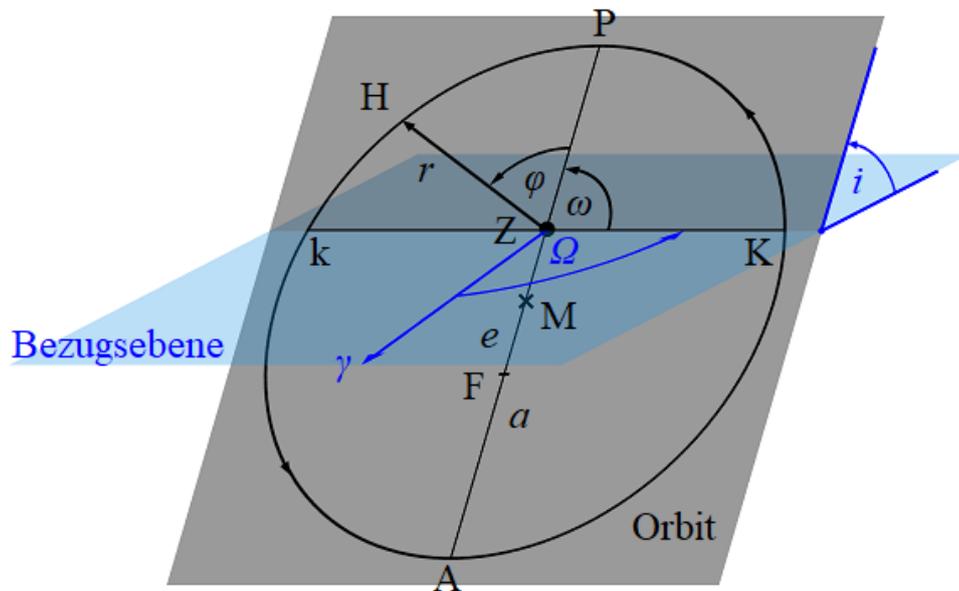


Abbildung 2.3: Grafische Darstellung zu den sieben Bahnelementen. Dabei ist in hellblau eine Bezugsebene und in grau die entsprechende Bahnebene der Bewegung des Himmelskörpers H. Zusätzlich sind der Zentrale Körper Z (Brennpunkt), die Periapsis P, die Apoapsis A, aufsteigender Knoten K (Frühlingspunkt) und absteigender Knoten k eingezeichnet. Geometrischer Mittelpunkt der elliptischen Bahn ist M und F der zweite Brennpunkt, außerdem ist $\vec{\gamma}$ die Richtung zum Beobachter B (nicht eingezeichnet).

In diesem Bezugssystem werden auch die Inklinationen der Mondbahnen angegeben (Lieske, 1977, Williams, 2023). Bei der Beobachtung dieses Systems ergäbe sich durch die Richtung zum Beobachter eine weitere Ebene und dann reichen der Knotenwinkel Ω und die Richtung γ nicht mehr aus. Das kann aber durch genau die gleichen Bahnelemente kompensiert werden, indem beispielsweise das Jupitersystem in die Ekliptik umgerechnet wird.

Kapitel 3

Die Beobachtung

Im Zuge dieser Arbeit habe ich die Beobachtung an der Dr. Karl Remeis-Sternwarte Bamberg durchgeführt. Am Astronomischen Institut der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg standen mir damit eine Vielzahl von Teleskopen und Kameras zur Verfügung, darunter welche, die für professionelle Astrofotografie und Forschung genutzt werden. Bei meiner gesamten Beobachtung habe ich berücksichtigt, dass sie an einer Schule umgesetzt werden soll.

Schülerinnen und Schüler sollen Bilder vom Jupiter und den Galilei'schen Monden aufnehmen. Sie sollen dazu keine eigene Ausrüstung benötigen und es beaufsichtigt an der Schule durchführen. In höheren Klassenstufen, z.B. im Astrophysikkurs der Oberstufe, sollen aus den gewonnenen Informationen die Grundlagen der Kepler'schen Gesetze hergeleitet werden.

3.1 Planung der Beobachtung

3.1.1 Zeitliche Rahmenbedingungen

Für Fotografien der großen Jupitermonde muss der Jupiter beobachtbar sein. Er steht etwa über drei Viertel eines Jahres am Himmel, also beispielsweise von Juni 2023 bis März 2024 (Chéreau, 2023). Mit Hilfe von Daten der NASA (Williams, 2023) oder gegebenenfalls eigener Erfahrung, durch zum Beispiel formlose frühere Beobachtungen, kann die Dauer der Beobachtungsreihe abgeschätzt werden. So reichen die Perioden der Monde von nicht ganz zwei Tagen von Io bis etwas über zwei Wochen von Kallisto. Ich empfehle daher sowohl eine lange Beobachtung pro Nacht, als auch eine längere Phase über mehrere Nächte. Um den kurzen Orbit von Io abzubilden, scheint mir ein Foto alle zwei bis vier Stunden sinnvoll. Für den langen Umlauf von Kallisto würde ich über acht oder neun Tage hinweg, wenigstens ein Foto pro Nacht aufnehmen, um etwa eine halbe Periode abdecken zu können. Pro Nacht sollte der Jupiter also vier bis acht Stunden über dem Horizont sein und das für mindestens acht oder neun Tage. Insgesamt kommen so etwa 24–27 Aufnahmen zusammen und bei einer Verlängerung über zwei bis drei Tage können einzelne Beobachtungszeitpunkte, die z.B. durch einziehende Wolken oder den Mond verhindert werden, kompensiert werden.

3.1.2 Örtlichkeiten und Lichtverschmutzung

Die Wahl des Beobachtungsplatzes ist ebenso wichtig, künstliche und natürliche Hindernisse sollten die angesprochenen Zeitfenster nicht beeinträchtigen. Der Platz sollte einigermaßen sicher und nicht für jeden zugänglich sein, damit die mobile astronomische Ausrüstung vor Diebstahl geschützt ist. Bei der Wahl des Beobachtungsplatzes muss außerdem die Lichtverschmutzung berücksichtigt werden. Sie ist in der Astronomie von essentieller Bedeutung.

Ich habe meine Beobachtung in Bamberg durchgeführt, der Nachthimmel dieser Stadt fällt in die Klasse 5 (Stare, 2023/2024, Falchi, 2016) der Bortle-Skala (Bortle, 2006). Diese wird als „Vorstadthimmel“ bezeichnet und es gilt eine Grenze von 5,6 mag bis 6,0 mag scheinbare Helligkeit für Objekte, die noch mit bloßem Auge sichtbar sind (Bortle, 2006). Die Galilei'schen Monde haben eine scheinbare Helligkeit von höchstens 5,7 mag (Sheppard, 2023) und sie sind bequem mit einem Teleskop in Bamberg zu sehen. Bei Klasse 9 „Himmel in Großstadtzentren“ (Bortle, 2006), der höchsten Lichtverschmutzung, sind immer noch die Planeten beobachtbar und durch die Verwendung von Optischen Hilfsmitteln verschiebt sich die scheinbare Helligkeit der beobachtbaren Objekte nach oben (also zu lichtschwächer) (Bortle, 2006). Kandidaten, welche in Deutschland solch eine hohe Klasse erreichen könnten, sind die Millionenstädte Berlin, Hamburg, München und Köln, sowie deren Metropolregionen und die Ballungsräume Ruhrgebiet, Frankfurt/Mannheim und Halle/Leipzig (Statistikportal, 2024). Bei einem groben Vergleich stellte ich fest, dass das nur für die Innenstädte von Berlin und Hamburg, Bruckhausen im Ruhrgebiet und die Flughäfen von Köln und Frankfurt a.M. der Fall ist (Stare, 2023/2024, Falchi, 2016). Ich schließe daraus, dass die Jupitermonde überall in Deutschland beobachtbar sind, also auch in den Großstädten, sofern die Sicht nicht ohnehin durch Bebauung blockiert ist.

3.2 Die Beobachtungsausrüstung

3.2.1 Mein Entscheidungsprozess zur Wahl des Equipments

Was ist für die Beobachtung geeignet?

Prinzipiell ist für die Beobachtung und Fotografie der Galilei'schen Monde jede erdenkliche einsteigerfreundliche Ausrüstung geeignet. Ordonez-Etxeberria et al. (2016) spricht von Amateureignung und von Teleskopen mit einer 10 cm Öffnung, sowie CCD oder CMOS Kameras. Das können ein Einsteigerteleskop und ein Smartphone sein. Mit der Handykamera kann direkt am Okular das Bild fotografiert werden, welches mit dem Auge zu sehen ist. So ein Einsteigerteleskop kann mit meinem aus der Kindheit verglichen werden. Es ist dem *Starscope707* von TS-Optics sehr ähnlich, welches zu einem Kaufpreis von ca. 100,- € (Ransburg, 2024) erworben werden kann.

Was ist erforderlich, um eine Messreihe zu erstellen?

Die Gewinnung von physikalisch verwertbaren Daten aus den Aufnahmen von Jupiter und seinen Monden machen weitere Ansprüche an die Ausrüstung erforderlich. Die verwendete Kamera sollte so mit dem Teleskop verbunden werden können, effektiv fungiert

das Teleskop dann als Objektiv für die Kamera. Dazu eignen sich entweder Spiegelreflexkameras mit abnehmbarem Objektiv oder astronomische Kameras. Dadurch werden nicht nur statistische Fehler durch „Wackeln“ vermieden, sondern der Abbildungsvorgang findet nur noch durch eine Optik statt und ist damit für spätere Berechnungen sinnvoll vereinfacht. Unabhängig davon, auf welche Kamera die Wahl fällt, muss ich das Teleskop so wählen, dass mein gewünschtes Objekt abbildbar ist. In diesem Fall schätze ich den Sehwinkel α des Jupitersystems mit der Apsidenlinie das Kallisto ab. Ich nutze die Kleinwinkelnäherung, rechne den Winkel in Bogensekunden um. Es gilt

$$\alpha \approx 2 \tan \tilde{\alpha} = 2 \cdot \frac{a_4}{d_{EJ}} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 3600 \frac{1''}{1^\circ} = 412\,529,6'' \cdot \frac{a_4}{d_{EJ}}. \quad (3.1)$$

Für die Berechnung der Bildgröße, bzw. der Winkelabdeckung der Kamera β , nutze ich die Winkelabdeckung pro Pixel θ (Remeis-Sternwarte, 2023) und multipliziere sie mit der Anzahl der Pixel P . Je nach Kamera und Teleskop werden die Werte für den Pixelpitch p und die Brennweite f eingesetzt. Um das Auftreten von Abbildungsfehlern zum Rand des Bildes hin zu minimieren, sollten Teleskop und Kamera so gewählt werden, dass β nicht nur knapp größer ist als α aus (3.1). Alternativ kann direkt mit der Abmessung des Sensors l gerechnet werden und es gilt

$$\beta = \theta P = 206,2648 \frac{1''}{\text{Pixel}} \cdot \frac{p [\mu\text{m}]}{f [\text{mm}]} \cdot P = 206\,264,8'' \cdot \frac{b [\text{mm}]}{f [\text{mm}]}. \quad (3.2)$$

Was ist für eine Schule angemessen?

Ausrüstung für eine Schule sollte in der unteren Preisklasse liegen, dennoch aber einige Komfortfunktionen bieten. Unter Einsteigerausrüstung (Ransburg, 2024) finden sich beispielsweise Komplettpakete inklusive Fernrohr, automatischer Montierung und Stativ innerhalb einer Preisspanne von ca. 1 000,- bis 2 600,- € (Ransburg, 2024). Bei Verzicht auf die automatische Nachführung oder Verwendung einer horizontalen Montierung wird es sogar noch günstiger. Allerdings geht dabei auch eine Komfortfunktion verloren, die ich beim Beobachten mit unerfahrenen Astronomen für sinnvoll erachte. Zwar ist der Jupiter auch sehr gut mit einer horizontalen Montierung und ohne Automatik zu finden, hat aber zur Folge, dass das Teleskop jedesmal neu ausgerichtet werden muss. Außerdem ist eine automatische Nachführung unverzichtbar für den Fall, dass einmal länger belichtet werden muss. Eine geeignete Kamera könnte die *Canon EOS 2000D* sein, sie liegt preislich bei etwa 400,- € (Amazon, 2024). Es ist eine Spiegelreflexkamera mit Bajonettverschluss und manigfaltiger manueller Aufnahmeeinstellungen (Canon, 2017). Sie ist an ein Fernrohr montierbar und da man so eine Kamera auch für andere Zwecke verwenden kann, halte ich das für einen angemessenen Preis für eine Schule. Am entscheidendsten ist aber, dass handelsübliche Spiegelreflexkameras für die Aufnahme von sichtbarem Licht konzipiert sind und die Realität so abbilden, wie wir sie sehen (Canon, 2024). Vergleichbare „richtige“ Astrokameras sind meistens um einiges teurer, benötigen nicht selten eine zusätzliche Stromversorgung, Filter und weiterführendes Wissen über Imaging (Remeis-Sternwarte, 2023), sowie einen PC-Anschluss und entsprechende Software (Ransburg, 2024).

3.2.2 Die von mir verwendete Ausrüstung

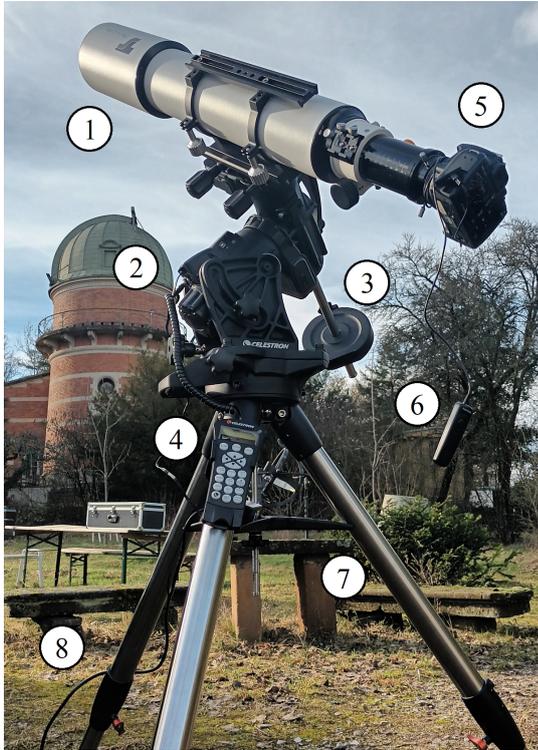


Abbildung 3.1: Meine Beobachtungsausrüstung, aufgebaut im Garten der Dr. Karl Remeis-Sternwarte Bamberg.

Gemäß Abbildung 3.1 umfasst die von mir verwendete Ausrüstung den *Photoline Apo* 115 mm $f/7$ Refraktor von *TS Optics* (1) und die *Celestron CGX*-parallaktische Montierung (2), mit montiertem Gegengewicht (3) und Handsteuerung (4). Außerdem ist dabei die *Canon EOS 1000D* Spiegelreflexkamera (5) mit der Kabelfernbedienung *Auslösekabel RS-60E3* (6). Ein Stativ (7) ist im Lieferumfang der Montierung enthalten ist und der Aufbau ist an eine externe Stromversorgung (8) angeschlossen.

Das Fernrohr ist ein Apochromat, der mehrere Linsen, hier drei, als Objektiv verwendet (Ransburg, 2024). Eine Optik aus mehreren Gläsern, mit verschiedenen Dispersionen, minimiert die chromatische Aberration, im Vergleich zur einfachen Linse (Demtröder, 2017a). Daraus ergibt sich eine besonders gute Eignung für die Astrofotografie (Ransburg, 2024). Es hat eine Brennweite von $f = 115 \text{ mm} \cdot 7 = 805 \text{ mm}$.

Die Montierung *Celestron CGX* ist eine computergesteuerte äquatoriale Montierung. Sie führt automatisch nach und eine Vielzahl von eingespeicherten Objekten, darunter Jupiter, können per Knopfdruck anvisiert werden (Ransburg, 2024).

Die Canon EOS 1000D ist eine handelsübliche digitale Spiegelreflexkamera. Sie besitzt einem CMOS Sensor mit 3888×2592 Pixel und den Maßen $22,2 \text{ mm} \times 14,8 \text{ mm}$ (Canon, 2008). Durch das abnehmbare Objektiv ist sie nach Zukauf von Adaptern, an Teleskope montierbar und für die Astrofotografie geeignet. Ein nützliches Zubehör stellt hierbei die Kabelfernbedienung (Auslösekabel RS-60E3) dar, damit kann man den Auslöser betätigen, ohne dabei die Kamera berühren zu müssen und ein Verwackeln des Bildes zu riskieren. Gemäß der höheren Empfindlichkeit des menschlichen Auges für grünes Licht, besitzt der Kamerasensor doppelt so viele grüne Pixel, wie je rote und blaue (Canon, 2024).

Berechnung der erforderlichen Eigenschaften

Mit den Gleichungen (3.1) und (3.2) habe ich einige Grundlagen festgelegt, welche die Beobachtungsausrüstung erfüllen muss. Diese werde ich für meine Ausrüstung und für den Fall nachrechnen, wenn sich Erde und Jupiter am nächsten sind. Dazu verwende ich d_{EJ} aus Tabelle A.2 und a_4 aus Tabelle A.1. Es gilt nach Gleichung (3.1)

$$\alpha = 412\,529,6'' \cdot \frac{a_4}{d_{EJ}} = 412\,529,6'' \cdot \frac{1,8827}{5,885 \cdot 10^2} \approx 1\,320,09'' \quad (3.3)$$

und mit $f = 805$ mm und $l = 22,2$ mm nach Gleichung (3.2)

$$\beta = 206\,264,8'' \cdot \frac{l [\text{mm}]}{f [\text{mm}]} = 206\,264,8'' \cdot \frac{22,2}{805} \approx 5\,688,30'' \approx 4,3\alpha. \quad (3.4)$$

Zusammenfassung

Mit dieser Ausstattung bin ich in der Lage, den Jupiter und seine Monde so zu fotografieren, dass über mehrere Aufnahmen hinweg Bewegungen zu erkennen sind. Das von mir verwendete Teleskop liegt bei einem Kaufpreis von ca. 1 800,- € (Ransburg, 2024), ohne Montierung. Insgesamt sind es etwa 5 500,- € (Ransburg, 2024), das ist für ein Schulprojekt, für welches laut Lehrplan keine Notwendigkeit besteht (Räde, 2024), zu teuer. Im vorherigen Teilabschnitt habe ich Ausrüstung erwähnt, die innerhalb einer Preisspanne von ca. 1 000,- bis 2 600,- € liegt. Das ist weniger als die Hälfte und es könnten die gleichen Fähigkeiten abgedeckt werden.

3.3 Durchführung

Die Beobachtung selbst verläuft relativ unkompliziert. Zunächst wird die Beobachtungsausrüstung aufgebaut und die Montierung auf den Nordstern ausgerichtet. Dazu genügt ein einfaches Polar-Alignment, denn ich führe keine Deep-Sky-Fotografie durch und um den Jupiter anvisiert zu halten, ist das genau genug, ich muss ihn höchstens wieder in die Bildmitte zentrieren. Jetzt zeigt sich auch der Vorteil der Komfortfunktionen: Einmal eingerichtet, kann ich die Ausrüstung mehrere Tage stehen lassen und muss sie nur gegen mögliche Witterung schützen. Sollte ein Meridianflip nötig sein, hilft mir ebenfalls die computergesteuerte Montierung, da sie das entweder automatisch macht oder der Jupiter erneut per Knopfdruck gefunden werden kann.

3.3.1 Probeaufnahmen und Arbeitsroutine entwickeln

Ich empfehle es, sich einen Beobachtungsabend Zeit zu nehmen, um gute Einstellungen der Kamera und des Teleskops zu finden. Dazu nutze ich eine Bahtinovmaske, um für die Kamera den perfekten Fokus zu finden und merke mir die Einstellung am Okularauszug. Für die Aufnahmen habe ich mehrere Einstellungen für die Lichtempfindlichkeit ISO, die Belichtungszeit und die Bildgröße, bzw. das Bildformat durchprobiert. Desweiteren sollten alle automatischen Korrekturen, sowie der Blitz deaktiviert sein und das Aufnahmeformat RAW gewählt werden, bei dem die Rohdaten ohne weitere Verarbeitung gespeichert werden (Canon, 2008). Das Format liefert eine Auflösung von $3\,888 \times 2\,592$ Pixel und die Bilder müssen am PC nachbearbeitet werden. Daher habe ich alle Testaufnahmen immer wieder am PC überprüft und die besten Einstellungen sind ISO 100, für das kleinstmögliche Hintergrundrauschen und Belichtungszeiten von $1/3$, $1/4$ und $1/5$ s. Damit ist Jupiter überstrahlt, aber die Monde sind so deutlich zu erkennen, dass sich aus den Positionen auf den Fotos Relativkoordinaten zu Jupiter auslesen lassen. Die besten Probeaufnahmen können bereits in die Messreihe integriert werden.

Daraus resultiert, was ich als „Arbeitsroutine“ bezeichne. Am Beobachtungszeitpunkt Fernrohr mit Kamera in Position bringen, Foto mit den als optimal gefunden Einstellungen

aufnehmen, Bild auf den PC laden und das Ergebnis überprüfen, sowie gegebenenfalls gleich nachbearbeiten. Wiederholung zum nächsten Zeitpunkt.

3.3.2 Besonderheiten, Tipps und Erfahrungen aus der Praxis

Ich habe in Gleichung (3.2) die Breite des Sensors benutzt, um abzuschätzen, ob das Jupitersystem auf das Bild passt. Um das zu gewährleisten und zugleich immer eine ähnliche Ausrichtung beizubehalten, habe ich die Kamera parallel zur Deklinationsachse angebracht. Nach einem Meridianflip muss sie dann um 180° im Vergleich zu vorher gedreht werden. Ich empfehle es, an jedem Zeitpunkt der Beobachtung gleich mehrere Bilder mit kleiner Varianz der Belichtungszeit aufzunehmen. So steht am PC eine größere Auswahl für ein sehr gutes Foto zur Verfügung.

Sind über eine Beobachtungsnacht starke Schwankungen von Temperatur und Luftfeuchtigkeit zu erwarten, so haben sich für mich weitere Tricks als hilfreich herausgestellt. Ich würde nur Teleskope mit Taukappe verwenden, sie fängt Kondenswasser ab, welches im Winter sogar auf der Optik gefrieren kann. Für letzten Fall kann man sich auch einen Föhn bereithalten. Um weiteres Beschlagen der Optiken zu verhindern, sollten Fernrohr und Kamera bereits mehrere Stunden vorher im Freien gelagert werden, damit sie sich akklimatisieren können. Die Kamera sollte also auch zwischen den Beobachtungszeitpunkten immer wieder nach draußen gebracht werden, dabei aber den Akku entfernen. Durch Temperaturunterschiede dehnt sich das Fernrohr leicht und daher empfehle ich, vor jeder Beobachtungseinheit, den Fokus mit der Bahtinovmaske zu überprüfen.

Die Vorteile einer computergesteuerten äquatorialen Montierung und einer Fernbedienung für die Kamera habe ich bereits geschildert. Aus der Berechnung von Gleichung (3.2) ergibt sich, dass ich noch relativ viel Platz auf dem Foto hätte. Soll das Jupitersystem größer abgebildet werden, kann eine Barlow-Linse oder ein Teleskop mit größerer Brennweite verwendet werden. Das Teleskop, dessen Brennweite besser gepasst hätte, war ein Spiegelteleskop ohne Taukappe. Das habe ich aufgrund zuvor beschriebener Gründe nicht gewählt. An dieser Stelle rate ich zusätzlich von der Verwendung einer Barlow-Linse ab, im Hinblick auf eine didaktische Reduktion macht sie den Abbildungsvorgang nur unnötig kompliziert.

3.3.3 Die Beobachtungsreihe

Meine Beobachtungen habe ich vom 20.01.2024 bis 30.01.2024 durchgeführt. Die erste Aufnahme habe ich um 18:20 Uhr am 20.01. und die letzte am 30.01. um 17:39 Uhr gemacht. Es sind insgesamt 25 Fotos. Für die Berechnungen unterteile ich den zeitlichen Verlauf in Stunden und definiere 18:00 Uhr des ersten Tages als 0 h. Mein erster Beobachtungszeitpunkt ist damit bei $t_1 = 0,3$ h und mein letzter bei $t_{25} = 239,65$ h. Bei $t = 240$ h, also 18:00 Uhr des letzten Tages lege ich das Ende der Beobachtung fest.

Ich habe alle Bilder im RAW-Format aufgenommen und zur Veranschaulichung habe ich sie in den sRGB-Farbraum ohne weitere Nachbearbeitung konvertiert. Jupiter und seine Monde sind auf den ursprünglichen 3888×2592 Pixel großen Bildern sehr klein, daher ist Abbildung 3.2 ein 480×270 Pixel großer Ausschnitt. Alle weiteren Fotos habe ich in Anhang C, mit einer Auflösung von 960×540 hinterlegt. Die Formate habe ich gewählt, weil so das Jupitersystem gut zu sehen ist und sie $1/4$ bzw. $1/2$ des FullHD-Formats



Abbildung 3.2: Ausschnitt der Aufnahme Nr. 2333 vom 26.01.2024 um 17:35 Uhr, $t = 143,58\bar{3}$ h.

entsprechen.

Auf den Bildern ist zu sehen, dass das Abbilden der Jupitermonde schon bei Dämmerung, sowie durch eine schwache Bewölkung oder Schleierwolken möglich ist. Um letzteres zu gewährleisten habe ich die Belichtungszeit erhöht. Ein Beispiel dafür ist Abbildung C.11, man erkennt deutlich den Halo um Jupiter, welcher durch Schleierwolken verursacht wurde. Die Monde werden dadurch zwar stärker verwaschen, aber eine Bestimmung der relativen Positionen ist trotzdem möglich. An dieser Stelle zeigt auch noch einmal der Vorteil einer automatischen Nachführung. Im vorherigen Abschnitt habe ich empfohlen, den Fokus vor jeder Beobachtungseinheit mit einer Bahtinovmaske zu überprüfen. Das Negativebeispiel, aus welchem ich das gelernt habe, ist Abbildung C.16. Hier habe ich durch Schleierwolken fotografiert und nicht den Fokus überprüft. Bei Foto C.12 ist die Belichtungszeit, für die Bewölkung, zu kurz und die Monde sind nur bei starker Kontrastverstärkung zu finden. Außerdem ist hier einer der Monde von einem nahegelegenen Baum verdeckt.

3.4 Beschränkung durch Beobachtungsparameter

Astronomische Beobachtungen bringen eine Reihe von technischen Aspekten mit, die berücksichtigt werden müssen. Dazu gehören das Auflösungsvermögen von Teleskop und Kamera, die Bau- und Funktionsweise des Fotochips und das Seeing (Remeis-Sternwarte, 2023).

3.4.1 Die Funktionsweise der Kamera

Prinzipiell funktioniert die Fotografie nach geometrischer Optik, die Linse erzeugt vom Gegenstand ein Bild auf dem Sensor. Dieser wandelt das einfallende Licht in elektrische

Signale um, die dann von der Software der Kamera als digitales Foto ausgegeben wird (Canon, 2024). Farbkameras verwenden eine Maske aus Farbfiltern, die einem Pixel einen individuellen Farbwert zuordnet, die sogenannte Bayer-Matrix (Remeis-Sternwarte, 2023, Canon, 2024). Es ist daher möglich, dass die Pixel des fertigen Bildes nicht mit den realen Pixeln auf dem Sensor übereinstimmen. Selbst Canon (2024) schreibt: „Außerdem gibt es aus einer ganzen Reihe von technischen Gründen keine Eins-zu-eins-Entsprechung zwischen den Sensoren im Sensor und den Pixeln im resultierenden digitalen Bild.“ Aufgrund der Verschwiegenheit von Herstellern ist es schwierig, an genauere Informationen zu kommen. Canon (2024) schreibt auch von „effektiven Pixeln“ und es sei sinnvoller, die Sensoreigenschaften damit zu beschreiben. Die Produktangabe von ca. 10,1 Megapixeln (Canon, 2008) ergibt sich genau aus der Auflösung des fertigen Fotos. Es gilt $3888 \times 2592 = 10\,077\,696$ und mit genau diesen effektiven Pixeln arbeite ich bei der Winkelabdeckung (Remeis-Sternwarte, 2023). Die Geometrie der Bayer-Matrix, bestehend aus 2×2 Feldern mit rot-grün-grün-blau (Canon, 2024), sorgt dafür, dass Lücken bei der Aufnahme der Farbinformationen entstehen. Diese Lücken werden über die integrierte Software zur tatsächlichen Bildgröße interpoliert (Remeis-Sternwarte, 2023). Daher ist ohne Einschränkungen annehmbar, dass sich die angegebenen Pixel auf das reale Bild auf dem Sensor beziehen und ein technischer Faktor nicht berücksichtigt werden muss.

Bei der Erzeugung eines digitalen Bildes werden die Farbinformationen in drei verschiedenen Farbkanälen gespeichert (Canon, 2024). Während der Verarbeitung kommen Parameter, wie Weißabgleich, Schärfung, Rauschreduzierung hinzu (Canon, 2024). Aufnahmen im RAW-Format erhalten die Farbinformationen der jeweiligen Pixel und dadurch können, mittels sogenanntem Debayering, Einzelbilder der jeweiligen Farbkanäle isoliert und erzeugt werden (Canon, 2024).

3.4.2 Beugungsbegrenzung der Optik

Ein weiterer Einfluss auf das Auflösungsvermögen ist die Beugungsbegrenzung des Teleskops. Sie wird durch das Rayleigh-Kriterium (Demtröder, 2017a) beschrieben und dieses wird als minimaler Winkelabstand berechnet. Mit der Wellenlänge des beobachteten Lichts λ und der Öffnung des Teleskops D , gilt in Bogensekunden

$$\begin{aligned} \delta_{min} ["] &= 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 3600 \frac{1''}{1^\circ} = 251\,643,056'' \cdot \frac{\lambda}{D} \\ \delta_{min}(\lambda = 550 \text{ nm}) &= 251\,643,056'' \cdot \frac{550 \cdot 10^{-6} \text{ mm}}{115 [\text{mm}]} = 1,2'' \end{aligned} \quad (3.5)$$

Im Klartext heißt das, je größer die Öffnung, desto kleiner der minimale Winkelabstand und umso besser die Auflösung. Es hängt auch von der Wellenlänge ab, rotes Licht hat eine größere Wellenlänge als blaues Licht und daher ist die Auflösung für rotes Licht schlechter, als für blaues. Ich habe das Auflösungsvermögen in Gleichung (3.5) für grünes Licht mit $\lambda = 550 \text{ nm}$ und für meine Öffnung von $D = 115 \text{ mm}$ abgeschätzt. Diese Wellenlänge habe ich, wie Demtröder (2017a), als Referenz genommen, weil unsere Augen im grünen Farbbereich am empfindlichsten reagieren und der Bildsensor meiner Kamera mehr grüne Pixel als rote oder blaue hat (Canon, 2024).

3.4.3 Winkelauflösung der Ausrüstung

Die Winkelabdeckung pro Pixel der Teleskop-Kamera Kombination beeinflusst ebenfalls die Auflösung. Mit Hilfe von geometrischer Optik bestimme ich, welchen Sehwinkel θ ein Pixel der Größe p (Pixelpitch) abdecken kann (Remeis-Sternwarte, 2023). Ich verwende die Brennweite $f = 805$ mm meines Fernrohrs und den Pixelpitch $p = 22,2$ mm : $3888 \text{ Pixel} \approx 5,71 \mu\text{m Pixel}^{-1}$ meiner Kamera, welchen ich aus der Sensorbreite und horizontaler Pixelanzahl berechne (Canon, 2008). Es gilt

$$\begin{aligned}\theta &= 206,2648 \frac{1''}{\text{Pixel}} \cdot \frac{p [\mu\text{m}]}{f [\text{mm}]} \\ \theta &= 206,2648 \frac{1''}{\text{Pixel}} \cdot \frac{5,71}{805} = 1,46'' \text{ Pixel}^{-1} \\ \theta [\text{rad}] &= \frac{p [\text{mm Pixel}^{-1}]}{f [\text{mm}]} = \frac{0,00571}{805 \text{ Pixel}} = 7,0932 \cdot 10^{-6} \text{ Pixel}^{-1}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

3.4.4 Das Seeing

Das Seeing ist eine Begrenzung der Auflösung durch atmosphärische Effekte oder sogenannte Luftunruhe (Demtröder, 2017a). Dessen Berücksichtigung ist bei erdgebundenen Beobachtungen essentiell. Demtröder (2017a) schreibt von einer Begrenzung von etwa $1''$, am Astronomischen Institut in Bamberg gehen wir von einem Seeing von $2\text{--}3''$ (Remeis-Sternwarte, 2023) in Bamberg aus. Sowohl die Beugungsbegrenzung des Fernrohrs, als auch die Winkelauflösung schränken mich weniger stark ein. Das Seeing sorgt dafür, dass die nahezu punktartrigen Monde stärker ausgedehnt sind und um ihre tatsächliche Position zittern. Deshalb verwende ich eine maschinelle Bestimmung der Positionen.

Kapitel 4

Messbarkeit und didaktische Reduktion

In diesem Kapitel möchte ich diskutieren, welche Größen ich bei den Galilei'schen Monden messen kann. Im diesem Zusammenhang werde ich auch didaktisch sinnvolle Reduktionen vornehmen.

4.1 Abschätzung der Beobachtbarkeit

4.1.1 Der geometrisch bestmögliche Beobachtungsfall

Haben Erde und Jupiter den minimalen Abstand zueinander, liegt die Bahnebene eines Mondes in der Bezugsebene und schaut der Beobachter orthogonal auf die Apsidenlinie des Mondes. Dann handelt es sich um den bestmöglichen Fall für die Beobachtung.

Für eine quantitative Abschätzung bestimme ich das Perijovum $d1_j$ und das Apojovum $d2_j$ eines jeden Mondes und vergleiche beide miteinander. Aus der Differenz Δd_j beurteile ich, ob ich einen Unterschied messen kann. Ich verwende dazu die Gravitationskonstante G und die minimale Distanz zwischen Erde und Jupiter $|\vec{\gamma}| = d_{EJ}$ aus Tabelle A.2, sowie Daten der NASA über die Galilei'schen Monde (Williams, 2023), aufgelistet in Tabelle A.1. Für eine Aussage zur Messbarkeit berechne ich den Schwinkel $\Delta\alpha_j$ der jeweiligen Differenzen mittels Kleinwinkelnäherung. Es gilt

$$\begin{aligned}d1_j &= a_j(1 - \varepsilon_j) \\d2_j &= a_j(1 + \varepsilon_j) \\ \Delta d_i &= |d1_j - d2_j| = |a_j(1 - \varepsilon_j) - a_j(1 + \varepsilon_j)| = 2a_j\varepsilon_j \\ \Delta\alpha_j &\approx \tan(\Delta\alpha') = \frac{\Delta d_j}{|\vec{\gamma}|} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 3600 \frac{1''}{1^\circ} = 206264,8'' \cdot \frac{\Delta d_j}{|\vec{\gamma}|}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Anhand der Werte in Tabelle 4.1 ist zu sehen, dass der Unterschied bei Io und Ganymed kleiner ist, als die Begrenzung durch das Seeing. Die Differenz bei Europa ist nur unwesentlich größer, bei diesen drei Monden werde ich die Apsiden nicht voneinander unterscheiden können. Kallisto ist der einzige Mond, bei dem ich möglicherweise einen Unterschied messen könnte, um auf eine elliptische Bahn zu schließen. An dieser Stelle sei betont, dass die hier angenommenen bestmöglichen Bedingungen nur mit sehr geringer

Tabelle 4.1: Unterschied im Sehwinkel zwischen den Apsiden der Jupitermonde bei senkrechtem Blick auf die Apsidenlinie.

j	Mond	$d1$ [10^3 km]	$d2$ [10^3 km]	Δd [km]	$\Delta\alpha$ ["]
1	Io	420,11	423,49	3 080	1,08
2	Europa	665,06	677,14	12 080	4,23
3	Ganymed	1 069,33	1 071,47	2 140	0,75
4	Kallisto	1 869,52	1 895,88	26 360	9,24

Tabelle 4.2: Die Massenverhältnisse der Jupitermonde mit der Gesamtmasse des Zweikörpersystems, mit der Jupitermasse aus Tabelle A.2 und den Massen der Monde aus Tabelle A.1.

Körper 1:	Io	Europa	Ganymed	Kallisto
$m_1 M^{-1}$	$4,7 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$7,8 \cdot 10^{-5}$	$5,7 \cdot 10^{-5}$
$m_2 M^{-1}$	0,99995	0,99997	0,99992	0,99994

Wahrscheinlichkeit eintreten werden. Wegen der Laplace-Resonanzen ist Ios Perijovum an Europas Apojoovum gebunden, aber die Apsiden rotieren und die von Ganymed sind trotz 2 : 1 Resonanz zu Europa davon unabhängig (Ordóñez-Etxeberria et al., 2016). Kallisto hat ungefähr eine Resonanz von 7 : 3 zu Ganymed (Ordóñez-Etxeberria et al., 2016) und da dessen Apsiden schon unabhängig von den anderen waren, ist ein synchrones Auftreten eher unwahrscheinlich.

4.1.2 Annahme von idealen Kreisbahnen der Monde

Nicht nur meine Berechnungen des letzten Abschnitts, sondern insbesondere die Exzentrizitäten der Monde selbst, zeigen, dass deren Bahnen fast kreisförmig sind. Im Vergleich zu den Planeten des Sonnensystems, sind die numerischen Exzentrizitäten der Galilei'schen Monde um etwa einen Faktor 10 kleiner (Williams, 2024a).

Folglich werde ich die zu erwartenden Bahnparameter für ideale Kreisbahnen der großen Jupitermonde berechnen. Mathematisch ist dieser Fall legitim, wenn die Masse eines Mondes m_1 gegenüber der Masse des Jupiters m_2 so klein ist, dass sie praktisch vernachlässigt werden kann. Dabei müssen nach Gleichung (2.1) die Grenzfälle $m_1 M^{-1} \rightarrow 0$ oder $m_2 M^{-1} \rightarrow 1$ gelten und es fällt der Schwerpunkt des Zweikörpersystems mit dem geometrischen Zentrum von Jupiter zusammen. Tabelle 4.2 zeigt sehr deutlich, dass die Approximation von Kreisbahnen legitim ist. Unter dieser Annahme ist die Zentripetalkraft F_Z die Gravitationskraft und aus diesem Ansatz ergibt sich eine dem dritten Kepler'schen Gesetz äquivalente Form. Sie enthält, anstatt der Gesamtmasse, die Masse des Jupiters und den Radius r der Kreisbahn. Für die Bahngeschwindigkeit, welche bei der Kreisbahn

Tabelle 4.3: Der Vergleich zwischen der elliptischen und einer hypothetischen kreisförmigen Bahn der Monde. Den Unterschied im Sehwinkel δ berechne ich analog zu Gleichung 4.1.

j	Mond	r_j [10^3 km]	$ r_j - d1_j $ [km]	$\delta 1$ ["]	$ r_j - d2_j $ [km]	$\delta 2$ ["]
1	Io	421,67	1 560	0,55	1 820	0,64
2	Europa	670,99	5 920	2,07	6 160	2,16
3	Ganymed	1 070,34	990	0,35	1 150	0,40
4	Kallisto	1 882,58	13 030	4,57	13 330	4,67

konstant ist, verwende ich den Quotienten aus Umfang und Periode $v = 2\pi r T^{-1}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
 F_Z &= F_G \\
 m_1 \frac{v^2}{r} &= G \frac{m_1 m_2}{r^2} \\
 \Leftrightarrow r^3 &= G \frac{m_2 T^2}{4\pi^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{G m_2 T^2}{4\pi^2}}.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Für jeden Mond berechne ich den idealen Bahnradius und vergleiche ihn mit dem jeweiligen Peri- und Apojovum. Mit Tabelle 4.3 ist zweifelsfrei klar, dass ich bei meinen Messungen die elliptischen Bahnen der inneren drei Monde nicht von einer Kreisbahn unterscheiden kann. Selbst bei Kallisto ist der Unterschied nicht mehr so signifikant und damit werde ich auch hier von einer Kreisbahn ausgehen. Insbesondere weil Kallisto auf meinen Fotos fast ausschließlich auf einer Seite des Jupiters zu sehen ist. Andernfalls hätte ich, zumindest testweise, die beiden Hälften eines Orbits unabhängig voneinander bestimmen und vergleichen können.

4.2 Auswirkung der Planetenorte auf die Beobachtung

Die Planeten Erde und Jupiter bewegen sich nicht komplanar um die Sonne und nehmen dadurch verschiedene Relativpositionen zueinander ein. Das führt zu unterschiedlichen Abständen und Blickwinkeln während der Beobachtung. Die Auswirkungen müssen bei der Berechnung der Bahnkurve berücksichtigt werden.

4.2.1 Die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit

Die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit führt, bei den großen Distanzen im Universum, zu einem zeitlichen Unterschied zwischen einem Ereignis und dessen Beobachtung. Verändert sich der Abstand zwischen Beobachter und beobachtetem Objekt, ändert sich dieser zeitliche Unterschied. Aufgrund dieser Tatsache hat Ole Römer (1644–1710) zum ersten Mal 1675 die Lichtgeschwindigkeit vermessen (Demtröder, 2017b). Ausgangspunkt war, dass er an unterschiedlichen Positionen der Erde, relativ zum Jupiter, eine Verzögerung der Verfinsterungszeit der Galilei'schen Monde festgestellt hat (Demtröder, 2017b).

Der größtmögliche Unterschied im Abstand zwischen Erde und Jupiter besteht beim Vergleich von Opposition mit Konjunktion. Dafür gilt, grob überschlagen, eine Differenz von zwei Astronomischen Einheiten (Williams, 2024a) mit einer Differenz der Lichtlaufzeit von $\Delta t = 2 \text{ AU } c^{-1} \approx 1000 \text{ s} \approx 16 \text{ Minuten}$. Im Fall meiner Beobachtung vom 20.01.2024 bis 30.01.2024, jeweils 18:00 Uhr Ortszeit, ergibt sich, mit Daten vom NASA *Horizons System* (Solar System Dynamics, 13.03.2024), eine Differenz im Abstand zwischen Erde und Jupiter von 24.063.559,4 km. Dividiere ich diese durch die Lichtgeschwindigkeit c_0 (A.2), erhalte ich einen Unterschied von ca. 80 Sekunden für die Laufzeit des Lichts. Über die Gesamtdauer von zehn Tagen kann ich diesen Effekt vernachlässigen.

4.2.2 Die Distanz zwischen Erde und Jupiter

Je nach Abstand von Erde und Jupiter misst man bei gleichem Sehwinkel eine andere Länge senkrecht zur Blickrichtung. Im Abschnitt 3.4.3 habe ich in Gleichung (3.6) die Winkelabdeckung eines Pixels der Kamera ausgerechnet. Mit Hilfe dieser Winkelabdeckung θ und der Entfernung zwischen Erde und Jupiter D_{EJ} bestimme ich die gemessene Strecke x . Multipliziere ich diese mit dem Pixelabstand a auf den Fotos, erhalte ich die tatsächliche Distanz r .

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{x}{D_{\text{EJ}}} \Leftrightarrow x = \theta D_{\text{EJ}} \Rightarrow r = ax = a \theta D_{\text{EJ}}, [r] = \text{km} \quad (4.3)$$

Im Rahmen meines Projekts kann ich die Distanz zwischen Erde und Jupiter nicht bestimmen. Ich gebe sie als Rahmenbedingung vor und dazu verwende ich Daten des NASA *Horizons System* (Solar System Dynamics, 13.03.2024).

4.2.3 Der Blickwinkel von der Erde

Je nach Positionen von Erde und Jupiter zueinander ändert sich auch die Perspektive von der Erde auf den Jupiter. Für die Beobachtung der Monde bedeutet es, dass sich ihr scheinbarer Umlauf vom physikalischen unterscheidet und sich der Blickwinkel auf die Bahnebenen verändert.

Jupiters Phasenwinkel

Der Phasenwinkel eines Planeten im Sonnensystem ist der Innenwinkel des Dreiecks Erde-Sonne-Planet an der Stelle des Planeten (Montenbruck, 2005). Ich nutze die Änderung von Jupiters Phasenwinkel, denn sie repräsentiert genau die scheinbare Verdrehung des Jupitersystems zu uns. Die Bahnparameter der Jupitermonde sind bezüglich dieses Systems angegeben (Lieske, 1977, Williams, 2023) und daher gilt das auch für die Sicht auf deren Bahnen. Den Phasenwinkel von Jupiter $\angle \text{STO}^1$ gebe ich mit Hilfe des NASA *Horizons System* (Solar System Dynamics, 13.03.2024) vor und berechne daraus einen zeitlichen Verlauf für meinen Beobachtungszeitraum. Zur Korrektur der scheinbaren Änderung des Umlaufes der Monde verwende ich die Differenz

$$\tau(t) = \angle \text{STO}(t) - \angle \text{STO}(t = 0). \quad (4.4)$$

¹engl.: Sun-Target-Observer, S-T-O, für Sonne-Jupiter-Erde

Ich möchte anmerken, dass das NASA *Horizons System* mit dem Winkel S-T-0 nicht den wahren Phasenwinkel angibt, dieser ist separat abrufbar. Der Winkel S-T-0 bezieht sich auf das, was der Beobachter tatsächlich sieht und daher verwende ich hier weiter den Begriff Phasenwinkel.

Die Inklination der Mondbahnen

Die Inklinationen der Monde sind alle kleiner als $0,5^\circ$ und sie werden in Bezug auf die Äquatorialebene von Jupiter angegeben (Williams, 2023). Mit der folgenden Rechnung zeige ich kurz, dass ich sie vereinfacht als in der Äquatorialebene liegend betrachten kann. Für den Unterschied im Sehwinkel gilt

$$\begin{aligned}\Delta\zeta &= \frac{206\,264,8''}{d_{\text{EJ}} [10^6 \text{ km}]} \cdot d2 [10^3 \text{ km}] \sin i \\ &= \frac{206\,264,8''}{588,5 \cdot 10^3 \text{ km}} \cdot d2 [10^3 \text{ km}] \sin i = 0,3505'' \cdot d2 [10^3 \text{ km}] \cdot \sin i,\end{aligned}\tag{4.5}$$

mit Daten aus Tabelle A.1, den zuvor berechneten Apojoven aus Tabelle 4.1, der Umrechnung von Grad in Bogensekunden und dem minimalen Abstand zwischen Erde und Jupiter. Für die Sehwinkel zwischen der Ebene des Jupiteräquators und dem jeweiligen Apojovom ergibt sich für die Monde $\Delta\zeta_1 = 0,1''$, $\Delta\zeta_2 = 1,9''$, $\Delta\zeta_3 = 1,2''$ und $\Delta\zeta_4 = 2,2''$. Aufgrund des Seeings kann ich diese Winkelabstände nicht abbilden und meine Vereinfachung gilt.

Die Perspektive auf Jupiters Äquatorialebene

Jupiters Äquatorialebene hat eine Neigung von ca. $3,1^\circ$ zu seiner Bahnebene und diese ist wiederum ca. $1,3^\circ$ zur Ekliptik geneigt (Williams, 2024b). Deshalb ist auch der Blickwinkel auf die Ebene von Jupiters Äquator, inklusive der Mondbahnen, abhängig von den Positionen von Erde und Jupiter. Um daraus eine Korrektur für die Auswertung der Daten zu berechnen, verschafft Jupiters Nordpol Abhilfe. Seine Richtung \vec{n} steht senkrecht auf der Äquatorialebene und mittels Vektorgeometrie lässt sich der Winkel, also die Inklination i , zwischen ihr und der Blickrichtung von der Erde $\vec{\gamma}$ berechnen. Da es sich um Richtungsvektoren handelt, sind es bereits Einheitsvektoren und es gilt $\angle(\vec{\gamma}, \text{Bahnebene}) = \arcsin(\vec{\gamma} \cdot \vec{n})$ (Bronstein, 1999).

Zur Bestimmung dieser Richtungen bieten sich Äquatorialkoordinaten an und für den Nordpol des Jupiters gilt Rektaszension $\alpha_N = 268,057^\circ - 0,006^\circ \cdot 0,24 \approx 268,056^\circ$ und Deklination $\delta_N = 64,495^\circ + 0,002^\circ \cdot 0,24 \approx 64,495^\circ$ (Williams, 2024b). Die Koordinaten des Planeten ($\alpha_J := \text{RA}$, $\delta_J := \text{DE}$) sind, für meinen Beobachtungszeitraum, in den Tabellen A.7 und A.8 aufgelistet. Um den Winkel zu berechnen, verwende ich geozentrische ekliptikale Koordinaten, zur einfacheren Orientierung. Diese modifizierten Kugelkoordinaten haben die kartesische Basis mit der x-Achse, die in Richtung des Frühlingspunkts zeigt, der z-Achse in Richtung ekliptisch Nord und der y-Achse, die ein entsprechendes Rechtssystem bildet (Montenbruck, 2005). Zur Umrechnung gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \epsilon \cos \delta \sin \alpha + \sin \epsilon \sin \delta \\ \cos \epsilon \sin \delta - \sin \epsilon \cos \delta \sin \alpha \end{pmatrix},\tag{4.6}$$

mit der Neigung der Erdachse $\epsilon = 23,439^\circ - 0,013^\circ \cdot 0,24 \approx 23,436^\circ$ (Montenbruck, 2005). Die jeweiligen α und δ für Jupiter, bzw. seinen Nordpol, eingesetzt ergibt das für die Inklination

$$\begin{aligned} \sin i &= \vec{\gamma} \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \beta_J \cos \lambda_J \\ \cos \beta_J \sin \lambda_J \\ \sin \beta_J \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta_N \cos \lambda_N \\ \cos \beta_N \sin \lambda_N \\ \sin \beta_N \end{pmatrix} \\ &= \cos \beta_J \cos \lambda_J \cos \beta_N \cos \lambda_N + \cos \beta_J \sin \lambda_J \cos \beta_N \sin \lambda_N + \sin \beta_J \sin \beta_N. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Die sich daraus ergebenden Werte habe ich mit in den Tabellen A.7 und A.8 aufgelistet. Für die Inklination selbst erhalte ich Werte im Bereich $[-2,97^\circ; -2,94^\circ]$, wobei das Vorzeichen nicht wichtig ist, da ich vorn und hinten nicht unterscheiden kann.

Auf den Fotos C.20, C.21 und C.22 ist deutlich zu erkennen, dass sich Kallisto (niedrigste Helligkeit) oberhalb von Jupiter befindet. Das nutze ich, um meine Inklinationsberechnung, zunächst einmal einfach, zu überprüfen. Dazu setze ich den Polradius von Jupiter (Williams, 2024b) mit Kallistos idealem Bahnradius (Tabelle 4.3) ins Verhältnis und berechne

$$i = \arctan\left(\frac{66,854 \cdot 10^3 \text{ km}}{1882,58 \cdot 10^3 \text{ km}}\right) \approx 2,03^\circ. \quad (4.8)$$

Sowohl Jupiter als auch Kallisto erscheinen durch die Überbelichtung größer und die Inklination wirkt dadurch kleiner, als sie tatsächlich ist. Daher betrachte ich meine Rechnung als korrekt.

4.3 Vereinfachung der sieben Bahnelemente

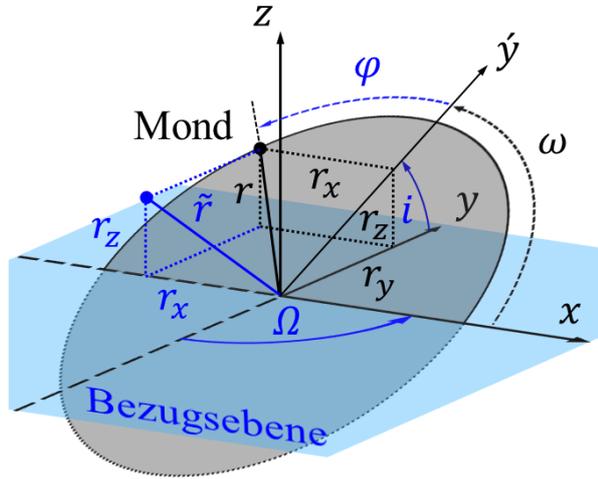


Abbildung 4.1: Vereinfachte Bahnelemente mit r als Abstand zwischen einem Mond und Jupiter (Zentrum). Das x-y-z-System ist das Beobachtersystem und die y-Achse sei die Sichtlinie von der Erde zum Jupiter. \hat{y} zeigt auf das hypothetische Perijovum.

Die Auswertung meiner Beobachtung der Galilei'schen Monde reduziert sich auf Kreisbahnen, daher vereinfachen sich auch die sieben Bahnelemente aus Abbildung 2.3. Alle Strecken vereinfachen sich zu $\overline{ZP} = \overline{Zk} = \overline{ZA} = \overline{ZK} = a = r$, dem Radius der Kreisbahn. Das gravitative Zentrum der Bahn Z wird zum geometrischen Zentrum M und die Exzentrizität verschwindet. Bei einer Kreisbahn gibt es keine Periapsis, daher definiere ich ihre Lage auf der Sichtlinie hinter Jupiter. Die Bahnebenen der Monde fallen mit Jupiters Äquatorialebene zusammen und es gilt die gemeinsame Inklination i zur Sichtlinie zu Jupiter als Teil der Bezugsebene. Die Knotenlinie ist daher senkrecht zur Beobachtungsrichtung. Zusammen mit der Lage der Periapsis existiere dieser Zustand bei $t = 0$. Der Periapsiswinkel ist damit $\omega = 90^\circ$ und den Knotenwinkel Ω nutze ich für die Korrektur der Perspektive $\tau(t)$.

Von der Erde sehe ich den scheinbaren Abstand \tilde{r} zwischen Mond und Jupiter als Projektion auf die x-z-Ebene. Das ist meine Messgröße. Die Bewegung innerhalb der Bahnebene lässt sich im \acute{x} - \acute{y} - \acute{z} -System, dem Jupitersystem, durch Polarkoordinaten mit $r_{\acute{x}} = r \cos \varphi + \omega = r \sin \varphi$ beschreiben. Unmittelbar folgt $r_x = r_{\acute{x}}$, da x-Achse und \acute{x} -Achse identisch sind. Desweiteren ist $r_{\acute{y}} = r \cos \varphi$ und $r_z = 0$. Der Phasenwinkel des Mondes berechnet sich als Produkt aus Winkelgeschwindigkeit und Zeit $\varphi(t) = 2\pi T^{-1} \cdot (t - t_0)$, nach dem Periapsisdurchgang t_0 . Letzterer liegt nur noch hypothetisch vor und ist hier effektiv eine zeitliche Verschiebung der Bahnfunktion. Den Begriff werde ich beibehalten.

Im Beobachtersystem ist $r_x = r \sin \varphi$, $r_y = r_{\acute{y}} \cos i = r \cos \varphi \cos i$ und analog $r_z = r \cos \varphi \sin i$. Um anhand des scheinbaren Abstands, meiner Messgröße, den wahren Abstand zu bestimmen, berechne ich die Koordinatentransformation zwischen r und \tilde{r} und es gilt

$$\tilde{r} = \sqrt{r_x^2 + r_z^2} = \sqrt{(r \sin \varphi)^2 + (r \cos \varphi \sin i)^2} = r \sqrt{(\sin \varphi)^2 + (\cos \varphi \sin i)^2}. \quad (4.9)$$

Mathematische Grundlage zur Bahnbestimmung

Mit $\sqrt{r_x^2 + r_z^2}$ kann ich die scheinbaren Abstände, zu den jeweiligen Zeitpunkten, auf den Fotos berechnen und als Funktion über die Zeit darstellen. Aus

$$\tilde{r}(t) = r \sqrt{\sin^2 \left(\frac{2\pi}{T}(t - t_0) \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{T}(t - t_0) \right) \sin^2 i} \quad (4.10)$$

bestimme ich die Bahnparameter Radius r , Periode T und Periapsisdurchgang t_0 .

Didaktische Reduktion

Aus didaktischen Gründen halte ich es für sinnvoll, von einem einfacheren Spezialfall auf den allgemeinen Fall zu schließen. Im hypothetischen Spezialfall, dass die Bahn orthogonal von oben oder unten beobachtet wird, ist $i = 90^\circ$ und $\sin i = 1$. Der Radikant in Gleichung (4.10) wird 1 und für alle Zeiten gilt $\tilde{r} = r$. Der hier plausiblere Spezialfall ist die Beobachtung der Mondbahnen gerade von der Seite. Die Inklination ist damit $i = 0$, $\sin i = 0$ und aus Gleichung (4.10) folgt

$$\tilde{r}(t) = r \sqrt{\sin^2 \left(\frac{2\pi}{T}(t - t_0) \right) + 0} = r \sin \left(\frac{2\pi}{T}(t - t_0) \right). \quad (4.11)$$

Mit $f(x) = \tilde{r}(t)$ und $x = t$ entspricht das einer allgemeinen Sinusfunktion

$$f(x) = a \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{b}(x - c) \right) + d, \quad (4.12)$$

dabei sind die Parameter $a = r$, $b = T$, $c = t_0$ und $d = 0$. Ich verwende sie für elementare Abschätzungen und um die Algorithmen zur Parameterbestimmung und zur grafischen Darstellung aufzustellen.

Kapitel 5

Auswertung und Berechnung der Bahnparameter

5.1 Astrometrie der Galilei'schen Monde und die Theorie ihrer Bewegung

Astrometrie aus gegenseitiger Verfinsterung und Verdeckung der Monde

Aus der gegenseitigen Verfinsterung und Verdeckung der Galilei'schen Monde bestimmt Kaas (1999) astrometrische Daten von ihnen. Verursacht Mond i auf Mond j eine Sonnenfinsternis, so kann durch den Schattenwurf eine Gerade durch die Punkte Sonne, Mond i und Mond j konstruiert und auf Einzelpositionen geschlossen werden. Wird Mond j durch Mond i verdeckt, so kann mit Hilfe der Beobachterposition auf der Erde analog eine Gerade durch die Punkte Mond j , Mond i und Erde gelegt werden. Aus den bekannten Positionen von Erde und Sonne können dann die Positionen der beiden beteiligten Monde gewonnen werden. Ausführliche photometrische Beobachtungen solcher gemeinsam auftretender Verfinsterungen und Verdeckungen wurden das erste Mal 1973 durchgeführt (Kaas, 1999). Ähnlich günstige Konstellationen von Jupiter ergeben sich laut Kaas (1999) alle sechs Jahre. Sie bezieht sich auf die Beobachtungen der Saison von 1990–1992. In diesem mehrjährigen Zeitraum wurden 213 Lichtkurven von 86 gemeinsamen Verfinsterungen und Verdeckungen aufgenommen, die Daten stammen dabei von großen Sternwarten, wie beispielsweise der Europäischen Südsternwarte oder dem Lowell Observatorium (Kaas, 1999).

Astrometrische Daten mit Hilfe der Verdeckung von Fixsternen

Eine andere Methode zur Gewinnung astrometrischer Daten beschreiben Morgado et al. (2022). Sie gewannen die Positionen der Monde aus deren Verdeckung von dahinter liegenden Sternen. Die geometrische Idee ist, dass sich einer der Monde zum Zeitpunkt der Verdeckung auf der Sichtlinie zwischen Stern und Erde befindet. So kann aus den bekannten Positionen der Erde und des Sterns der Ort des Mondes ermittelt werden. Zur Aufnahme von Daten wurden von 2019–2021 größere Beobachtungskampagnen organisiert und ältere Publikationen ausgewertet, zu den beteiligten Sternwarten gehören unter anderem das Brazilianische Nationalobservatorium und das astrophysikalische For-

schungslabor *LESIA* der Sternwarte Paris (Morgado et al., 2022). Aufgrund verschiedener Beobachtungspositionen wurden die Sterne an verschiedenen Stellen von den Mondscheiben verdeckt und Morgado et al. (2022) konnten die Positionen aus den Lichtkurven, mit einer Genauigkeit von einer Millibogensekunde, bestimmen. Das entspricht einer Ungenauigkeit von 3 km, wenn sich Jupiter in Opposition befindet (Morgado et al., 2022). Für das Erreichen dieser hohen Genauigkeit haben sie 3D Modelle der Galilei'schen Monde verwendet, die mit Hilfe der Sondenmissionen Voyager und Galileo erstellt wurden (White, 2014, Nimmo, 2007, Zubarev, 2014).

Die Theorie der Bewegung der Galilei'schen Monde

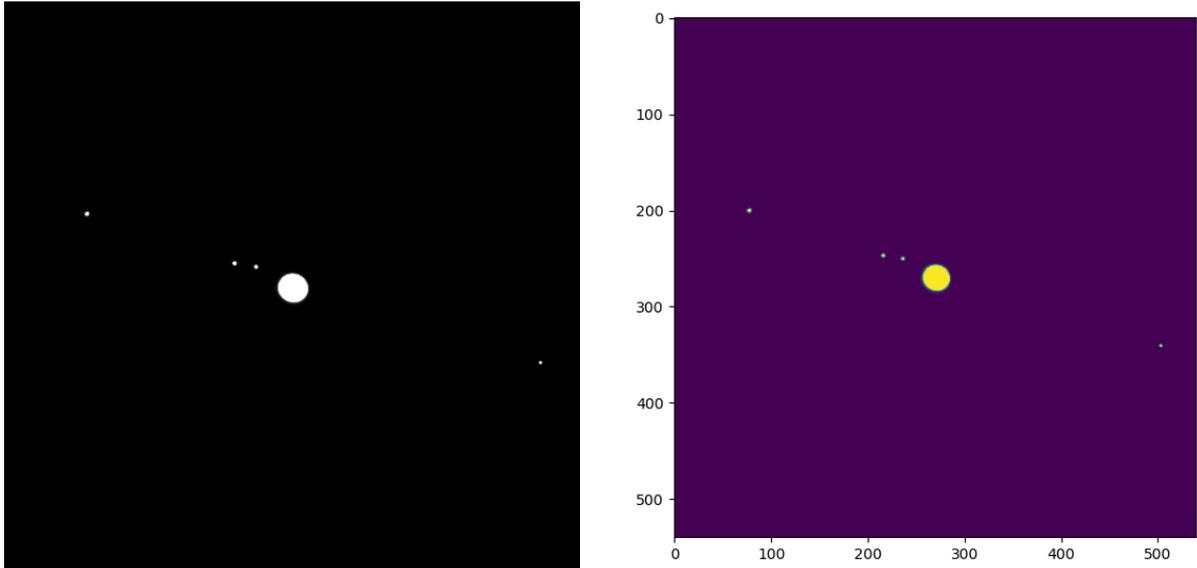
Die Bewegungstheorie der vier großen Jupitermonde nach Lieske (1977) beschreibt deren Bewegung im Raum. Sie werden in einem Koordinatensystem angegeben, welches explizit für das Jupitersystem definiert ist. Dessen Äquator ist die x-y-Ebene, die x-Achse ist die Schnittgerade der Äquatorialebene mit Jupiters Orbit und die z-Achse ist die Rotationsachse des Planeten. Die Bahnparameter der Monde werden in modifizierten Kugelkoordinaten bezüglich dieses Systems angegeben, mit dem Abstand eines Mondes zum Zentrum, dem Winkel zwischen Äquator und Ebene der Mondbahn (Inklination anstatt Polarwinkel) und dem Azimut zwischen x-Achse und senkrechter Projektion des Radius' auf die Äquatorialebene (Lieske, 1977, Williams, 2023). Um sie zu bestimmen, wird stattdessen in Zylinderkoordinaten, mit projiziertem Abstand auf die Ebene des Äquators und der Höhe darüber, gearbeitet (Lieske, 1977). Die Theorie von Lieske (1977) geht weit über die Kepler'schen Gesetze hinaus, es werden zuvor heuristisch gefundene Bewegungsgleichungen anhand von Aspekten wie Bahnstörungen und Libration diskutiert.

Methoden, wie die von Kaas (1999) und Morgado et al. (2022), tragen dazu bei, solche genauen Modellierungen zu ermöglichen. Sie nehmen mehrere Jahre an Forschung in Anspruch, benötigen umfangreiche Beobachtungen und die Theorien bauen immer wieder auf früheren Modellen auf. Meine Methode ermöglicht eine elementare Betrachtung und ich kann damit grundlegende physikalische Zusammenhänge finden.

5.2 Ermittlung von Positionsdaten aus den Fotos

5.2.1 Vorbereitung der Bilder

Im Abschnitt 3.4.1 habe ich die Funktionsweise der Kamera erklärt. Es lässt sich leicht nachprüfen, dass digitale Fotos dadurch als komplexe „Karten“ gespeichert werden, bei dem jeder Koordinate (Bildpunkt) drei Werte zugeordnet werden. Das erschwert ein Auslesen von Informationen und ich habe mich deshalb dazu entschieden, das Debayering anzuwenden und monochromatische Bilder zu erhalten. Jedem Bildpunkt ist dadurch genau ein Helligkeitswert zugeordnet. Ich habe mich für die Verwendung des grünen Farbkanals entschieden, denn einerseits ist dieser durch die meisten Pixel abgebildet und so werden Ungenauigkeiten durch Interpolationseffekte möglichst klein. Andererseits liegt der grüne Farbanteil des Lichts, trotz minimierter chromatischer Aberation am APOchromaten, in der Mitte der optischen Abbildung. Ich habe die Fotos sehr stark im Kontrast verstärkt, um nicht nur als Nutzer die Monde besser zu erkennen, sondern auch dem Algorithmus potentielle Fehlerquellen zu nehmen. Zusätzlich habe ich alle



(a) Grüner Farbkanal, zugeschnitten und mit Kontrastverstärkung.

(b) Darstellung im Programm, zur Ermittlung der Mondpositionen.

Abbildung 5.1: Beispielaufnahme aus Kapitel 3, in den Varianten (a) vorbereitet für das Programm und (b) in der Programmansicht.

Aufnahmen auf eine Größe 540×540 Pixel zugeschnitten, damit über alle Bilder hinweg stets das vollständige System zu sehen ist. Die Beispielaufnahme aus Kapitel 3 ist nach den Bearbeitungsschritten in Abbildung 5.1a zu sehen.

5.2.2 Systematisches Auslesen der Informationen

Für die Bestimmung der Positionen der Monde aus den Aufnahmen habe ich ein einfaches Python-Programm geschrieben. Der vollständige Programm-Code dazu befindet sich unter Anhang B.3. Mit Hilfe des Programms bestimme ich systematisiert die Positionen der Monde auf den Fotos und vermeide so individuelle Fehler durch „Pixelzählen“. Die mathematische Idee ist, dass ich mit Hilfe einer zweidimensionalen Normalverteilung (Bronstein, 1999) die Helligkeitsspitzen von Monden und Jupiter modelliere

$$z(x,y) = \frac{A}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-y_0)^2}{2\sigma_y^2}\right). \quad (5.1)$$

Dabei ist $z(x,y)$ ein Intensitätswert, der jedem Bildpunkt mit der Koordinate x und y zugeordnet ist. Durch die Modellierung erhalte ich die Parameter x_0 und y_0 als Koordinaten des Maximums, welches ich als geometrisches Zentrum der Himmelskörper interpretiere. Die Standardabweichungen σ_x und σ_y der jeweiligen Koordinaten interpretiere ich als Messunsicherheit bei den Monden. Der Jupiter ist näherungsweise eine große Kreisscheibe, dessen Streuung bezüglich der Normalverteilung viel zu groß wäre, als das sie durch die Bestimmung des geometrischen Zentrums plausibel wäre. Als seine Unsicherheit verwende ich daher die Varianzen der x- und y-Koordinaten, aus der Kovarianzmatrix des Funktionen-Fits und ziehe die Wurzel, um die Standardabweichung zu erhalten.

```
[270, 270, 1.0]
Classify point as 'm' (moon), 'j' (jupiter), or 'c' (correction): j
[[77, 200, 1.0, 2.0, 2.0], [215, 246, 1.0, 2.0, 2.0], [236, 250, 1.0, 2.0, 2.0],
 [270, 270, 1.0, 10.0, 10.0]]
[502, 340, 0.9687648]
Classify point as 'm' (moon), 'j' (jupiter), or 'c' (correction): m
[[77, 200, 1.0, 2.0, 2.0], [215, 246, 1.0, 2.0, 2.0], [236, 250, 1.0, 2.0, 2.0],
 [270, 270, 1.0, 10.0, 10.0], [502, 340, 0.9687648, 2.0, 2.0]]
```

Abbildung 5.2: Beispiele für die Übergabe der Startwerte im Programm.

Weiterhin erhalte ich A als Volumen unter der Verteilung, oder anders gesagt die Summe aller Intensitäten, welche ich aber nicht benötige.

Während des Programmablaufes soll der Nutzer die einzelnen Monde per Maustaste identifizieren und damit die Startwerte für den Funktions-Fit vorgeben. Dabei soll er dem Programm mitteilen, ob der Jupiter oder einen Mond angeklickt wurde, um bei der Ausgabe die entsprechenden Unsicherheiten zu bekommen. Ist ein Mond vor oder hinter dem Jupiter, so wird der Jupiter angeklickt und dem Programm die Information „Mond“ übergeben. Das Resultat wird die Koordinate des Jupiters sein, mit dessen großen Standardabweichungen. Abbildung 5.2 zeigt einen Teil der Klassifikation von zwei angeklickten Objekten in der Beispielaufnahme 3.2 bzw. 5.1b. Beim ersten Objekt, bei den Pixelkoordinaten (270, 270), war „j“ die Eingabe des Nutzers und es ist damit als Jupiter identifiziert. In der darauffolgenden Liste wurden sie, mit der Anfangsunsicherheit von 10,0 Pixel, als vierter Eintrag übergeben. Das nächste angeklickte Objekt hat der Nutzer, mit der Eingabe „m“, als Mond identifiziert und die Übergabe der Startwerte an die Liste erfolgte analog, allerdings jetzt mit einer kleineren geschätzten Unsicherheit von 2,0 Pixel.

In Abbildung 5.3 ist die Ausgabe des Programms, anhand der beiden gleichen Beispiele, nach der Berechnung zu sehen. Die Variable „popt“ gibt die Parameter der Funktion (5.1) als Liste $[x_0, y_0, A, \sigma_x, \sigma_y]$ aus und „pcov“ ist die dazugehörige Kovarianzmatrix des Fits. Darunter werden mit „initial guess“ noch einmal die Startwerte angezeigt und „fit result“ sind die endgültigen Werte der jeweiligen Position, als Liste [x-Koordinate, y-Koordinate, x-Unsicherheit, y-Unsicherheit]. Der obere Fall ist der Jupiter, mit den hohen Werten für die Standardabweichungen. Wie schon angesprochen, sind die als Unsicherheit für die Koordinaten nicht plausibel. Im Ergebnis befinden sich daher die ersten beiden Diagonaleinträge der Kovarianzmatrix, zur Wurzel genommen, als x- und y-Unsicherheit. Zum Beispiel ist $\sqrt{0,326} \approx 0,571 \approx 0,6$. Der untere Fall des einen Mondes gibt die Standardabweichungen als Unsicherheit für die Koordinaten aus.

Nach der Ermittlung der Positionen auf den Fotos berechne ich daraus die Abstände zwischen Jupiter und den Monden. Ich verwende dazu, nach dem Satz des Pythagoras’ (Bronstein, 1999), die Formel

$$a = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}. \quad (5.2)$$

Mit einer Fehlerfortpflanzung (Bronstein, 1999) bestimme ich die Unsicherheit des

```

popt = [270.41032891 270.34742961 719.47153099 -9.1348575 -8.81116869]
pcov = [[ 3.26138499e-01 -3.38266199e-13 -8.78918194e-09 7.21231705e-08
-2.77731831e-12]
[ -3.38266199e-13 3.03434622e-01 2.95908208e-08 -5.01669818e-11
6.87109393e-08]
[ -8.78918194e-09 2.95908208e-08 2.02313807e+03 -1.28435118e+01
-1.23884029e+01]
[ 7.21231705e-08 -5.01669818e-11 -1.28435118e+01 3.26138491e-01
-1.38113382e-10]
[ -2.77731831e-12 6.87109393e-08 -1.23884029e+01 -1.38113382e-10
3.03434614e-01]]
initial guess: [270, 270, 1.0, 10.0, 10.0]
fit result: [270.410328910762, 270.3474296126496, 0.5710853696300742,
0.5508490012852798]
-----
popt = [502.43793388 340.75754235 7.70497284 -0.96095764 -0.98969747]
pcov = [[ 3.70439878e-01 -7.29653009e-13 -5.49250669e-03 1.56519144e-03
9.18803947e-10]
[ -7.29653009e-13 3.94132688e-01 9.31806097e-03 1.74737704e-09
-2.70479554e-03]
[ -5.49250669e-03 9.31806097e-03 2.40066132e+01 -1.52512431e+00
-1.53308735e+00]
[ 1.56519144e-03 1.74737704e-09 -1.52512431e+00 3.81922126e-01
8.87308517e-10]
[ 9.18803947e-10 -2.70479554e-03 -1.53308735e+00 8.87308517e-10
3.93723581e-01]]
initial guess: [502, 340, 0.9687648, 2.0, 2.0]
fit result: [502.43793388363554, 340.7575423541943, -0.9609576388635075,
-0.9896974731298369]

```

Abbildung 5.3: Die Ausgabe des Programms nach dem Fit der Normalverteilung der Beispiele aus 5.2.

Abstands

$$\begin{aligned}
\delta a &= \left| \frac{\partial a}{\partial x_1} \right| \delta x_1 + \left| \frac{\partial a}{\partial x_2} \right| \delta x_2 + \left| \frac{\partial a}{\partial y_1} \right| \delta y_1 + \left| \frac{\partial a}{\partial y_2} \right| \delta y_2 \\
\frac{\partial a}{\partial k_i}(k_1, \dots, k_4) &= \frac{(k_1 - k_2) \cdot (\pm 1)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \\
\delta a &= \frac{x_1 - x_2}{a} \delta x_1 + \frac{x_2 - x_1}{a} \delta x_2 + \frac{y_1 - y_2}{a} \delta y_1 + \frac{y_2 - y_1}{a} \delta y_2 \\
&= \frac{1}{a} (x_1(\delta x_1 - \delta x_2) + x_2(\delta x_2 - \delta x_1) + y_1(\delta y_1 - \delta y_2) + y_2(\delta y_2 - \delta y_1)) \\
&= \frac{1}{a} ((x_1 - x_2)(\delta x_1 - \delta x_2) + (y_1 - y_2)(\delta y_1 - \delta y_2)).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Wie bereits angesprochen ist nicht zweifelsfrei erkennbar, ob sich ein Mond vor oder hinter Jupiter befindet. Durch die Punktspiegelung, aufgrund der Linsenabbildung, ändert sich auch der Drehsinn (Demtröder, 2017a). Da es mathematisch keinen Unterschied macht, ob die Orte auf den Bildern links oder rechts vom Jupiter liegen, definiere ich die auf der linken Seite mit negativem und jene rechts von Jupiter mit positivem Vorzeichen. Im Fall, dass sich ein Mond vor oder hinter Jupiter befindet, wird der Abstand Null und diese Rechnung obsolet. In diesem Fall wähle ich für $\delta a = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \cdot \sqrt{2}^{-1}$, mit σ_x und σ_y von Jupiter. Das entspricht einem, aus dem Mittelwert gebildeten, Radius.

Anhand der Beispielaufnahme 3.2 liste ich die Zwischenschritte exemplarisch auf. Eine explizite Rechnung führe ich bei Mond 1 durch und die gemessenen Daten in Pixel

sind

$$\text{Mond 1: } (x,y) = (77,3 \pm 1,5, 200,2 \pm 1,4) \Rightarrow a = -250,4 \pm 1,2$$

$$\text{Mond 2: } (x,y) = (215,6 \pm 1,4, 247,0 \pm 1,3) \Rightarrow a = -59,5 \pm 1,1$$

$$\text{Mond 3: } (x,y) = (235,8 \pm 1,3, 250,3 \pm 0,3) \Rightarrow a = -40,0 \pm 0,5$$

$$\text{Mond 4: } (x,y) = (502,4 \pm 1,0, 340,8 \pm 1,0) \Rightarrow a = 242,5 \pm 0,5$$

$$\text{Jupiter: } (x,y) = (270,4 \pm 0,6, 270,3 \pm 0,6)$$

Befinden sich die Monde links von Jupiter, ordne ich dem Abstand ein negatives Vorzeichen zu.

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{(77,3 - 270,4)^2 + (200,2 - 270,3)^2} = 205,430 \approx 205,4 \\ \delta a_1 &= ((77,3 - 270,4)(1,5 - 0,6) + (200,2 - 270,3)(1,4 - 0,6)) : 205,430 \quad (5.4) \\ &= -1,119 \approx -1,2 \end{aligned}$$

Im Anhang befinden sich die Tabellen A.4 und A.5 mit allen Messwerten. Tabelle A.6 enthält alle daraus berechneten Abstände und sie sind den jeweiligen Monden schon zugeordnet.

Bemerkung zur Angabe von Ergebnissen und Unsicherheiten

Die Ergebnisse dieses Abschnitts und deren Unsicherheiten habe ich nach DIN 1333 gerundet (Remeis-Sternwarte, 2023). Das bedeutet, ausgehend von der Unsicherheit bestimme ich die erste gültige Ziffer, das ist die erste Ziffer ungleich Null von links nach rechts gelesen. Ist sie eine Zahl von Drei bis Neun, so wird sie aufgerundet und ihre Stelle ist die Rundungsstelle bei der Ergebniszahl. Handelt es sich um eine Eins oder Zwei, so wird die nachfolgende Stelle aufgerundet und dementsprechend ist das die Rundungsstelle beim Ergebnis. Die Ergebniszahl wird auf die entsprechende Stelle abgerundet, wenn die nachfolgende Ziffer kleiner als Fünf ist und aufgerundet, wenn die nachfolgende Ziffer größer als Vier ist.

Für alle weiteren Ergebnisse und Unsicherheiten verfare ich entsprechend.

5.2.3 Identifikation der Monde

Die Galilei'schen Monde weisen prinzipiell signifikante Unterschiede in Größe und Helligkeit auf (Williams, 2023). Sie sind mit bloßem Auge unterscheidbar und können identifiziert werden, bei ungünstigen Sichtverhältnissen kann das aber zu Irrtümern führen. Nach dem Auswerten der Fotos sind es Punkte im Koordinatensystem und für die Identifikation führe ich eine einfache Anpassung der Gleichung (4.12) durch. Damit ordne ich die Messwerte den Monden im Ausschlussverfahren zu. Die bei der Anpassung ermittelten Parameter dienen mir später als Startwerte, sie sind aufgelistet in Tabelle 5.1. Grafiken zu den einzelnen Schritten befinden sich im Anhang B.4 und Abbildung 5.4 zeigt das Resultat der Zuordnung.

Zunächst habe ich alle Messwerte im Diagramm dargestellt, dazu ist auf der Abszisse die Zeit in Stunden und auf der Ordinate der Abstand zwischen den Monden und Jupiter

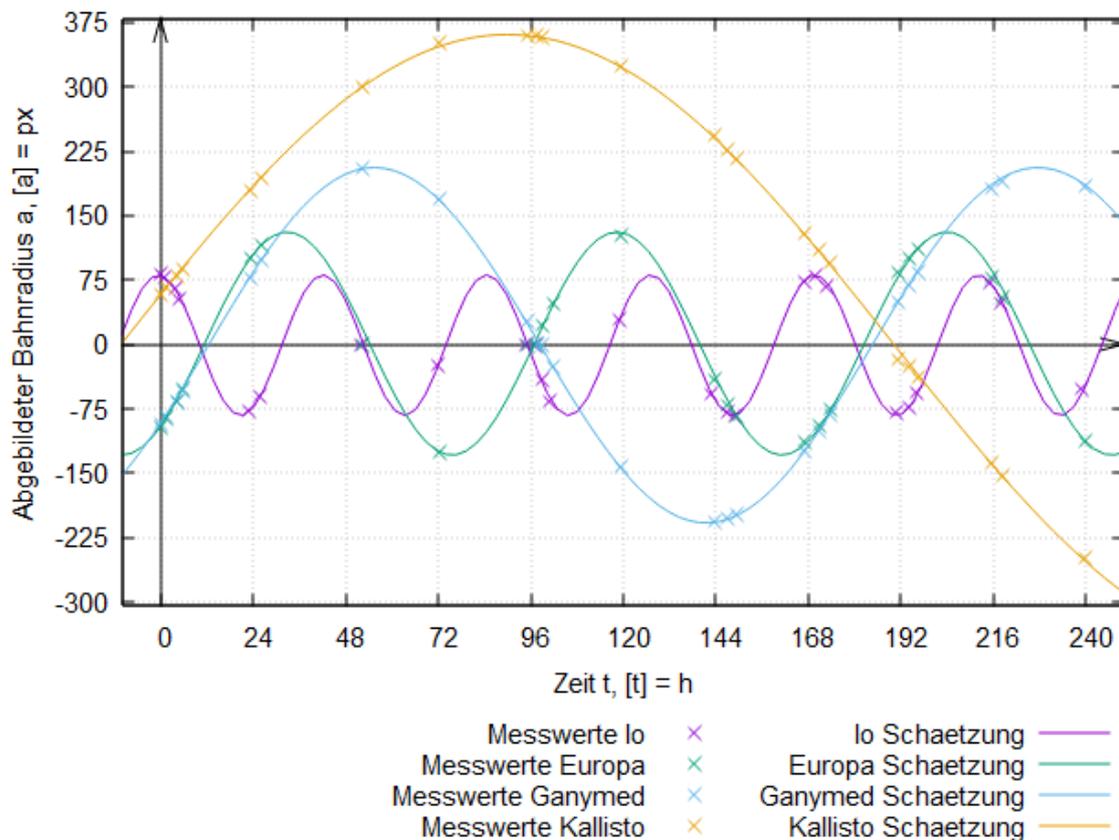


Abbildung 5.4: Die Zuordnung der Daten zu den Galilei'schen Monden.

in Pixel aufgetragen. Die Größe Pixel ist hier ausreichend, da nach Gleichung (4.3) die Umrechnung in eine Länge direkt proportional ist. Im ersten Schritt (B.1) habe ich Kallisto seine Messpunkte zugeordnet, seine Bahn ist aufgrund des größten Orbits am besten zu erkennen. Im zweiten Schritt habe die Messwerte der verbleibenden drei Monde dargestellt und den Io anhand des kleinsten Orbits identifiziert (B.2). Prinzipiell ist die Reihenfolge nicht relevant, aber die Messpunkte bei $t = 0$ h, um $t = 96$ h oder bei $t = 168$ h sind sehr unübersichtlich. Die Daten vom Mond mit der innersten Bahn sind dabei am besten zu erkennen. Im dritten Schritt ist noch Ganymed von Europa zu unterscheiden und es bleibt eine Entweder-oder-Fallunterscheidung übrig. Die Daten sind nun wesentlich übersichtlicher und es fiel mir nun leichter, Ganymed anhand des größeren Orbits gegenüber Europa zu erkennen (B.3). Die Laplace-Resonanzen (Ordonez-Etxeberria et al., 2016) sind eine gute Hilfe, um schnell geeignete Startwerte zu finden.

In Abbildung 5.4 habe ich auf die Darstellung von Fehlerbalken verzichtet, sie sind in diesem Maßstab sehr klein, ausgenommen jene, wenn sich die Monde vor oder hinter Jupiter befinden. Die Verwendung von Fehlerbalken hätte die Grafik sehr unübersichtlich gemacht und die Zuordnung der Monde erschwert. Es handelt sich hier lediglich um eine formlose Zuordnung von Messwerten.

Tabelle 5.1: Startwerte zur Bestimmung der Bahnfunktionen.

i	Mond	a_i [px]	b_i [h]	c_i [h]
1	Io	82	42,5	-11
2	Europa	130	85,5	11,5
3	Ganymed	207	172	12,5
4	Kallisto	360	400	-10

5.3 Auswertung der Beobachtung

Nach der Identifikation der Monde und der Zuordnung der jeweiligen Messwerte, kann ich nun jeden von ihnen einzeln gegen die Zeit auftragen und die Bahnfunktionen (4.10) und (4.12) ermitteln. Dabei bestimme ich die Bahnparameter und vergleiche sie mit den tatsächlichen Werten der NASA (Williams, 2023). Zur Erhöhung der Genauigkeit und um festzustellen, ob es didaktisch notwendig ist, werde ich die Korrekturgrößen einzeln hinzufügen und jeweils die gefunden Parameter vergleichen.

5.3.1 Modellierung der Korrekturgrößen

Die Rahmenbedingungen, die Einfluss auf meine Auswertung haben könnten, habe ich im Abschnitt 4.2 bereits erörtert. Hier werde ich sie quantifizieren und damit die Bahnfunktionen (4.10) und (4.12) modifizieren.

Daten vom NASA *Horizons System* sind, für meinen Beobachtungszeitraum, in den Tabellen A.7 und A.8 aufgelistet. Sie zeigen die Abstände zwischen Erde und Jupiter D_{EJ} , den Phasenwinkel $\angle STO$ und die Lage von Jupiters Nordpol, wie in Abschnitt 4.2.3 beschrieben. Mit Hilfe der Daten modelliere ich den zeitlichen Verläufe der jeweiligen Größen.

Die Distanz zwischen Erde und Jupiter

Bei der Betrachtung der NASA-Daten ändert sich der Abstand zum Jupiter in erster Näherung linear. Die Residuen in Abbildung 5.5 zeigen, dass auch die Eigenbewegung des Beobachters, auf der Oberfläche der Erde, durch ihre Eigenrotation, modelliert ist. Im Sinne meiner Arbeit ist das eine ungewollt hohe Genauigkeit, ich habe die dafür gefundene Störfunktion $D_{\sin}(t) = 4014 \sin(2\pi(t - 5,29)24^{-1})$ aber genutzt, um eine bessere Approximation, als die lineare erste Näherung, zu finden. Im Übrigen entspricht der Faktor 4014 in km dem Radius zur Erdachse, bei der geografischen Breite von Bamberg.

Mit dem Polynom dritten Grades

$$D(t) = -7,08 \cdot 10^{-3} t^3 + 3,425 t^2 + 99\,849,7 t + 7,16078 \cdot 10^8, [D(t)] = \text{km}, \quad (5.5)$$

habe ich eine sehr gute Näherung gefunden. Gemäß Gleichung (4.3) berechne ich die tatsächliche Entfernung als Produkt aus dem Pixelabstand auf den Fotos, der Winkelabdeckung pro Pixel und der Distanz zwischen Erde und Jupiter. Da ich die Bahnparameter

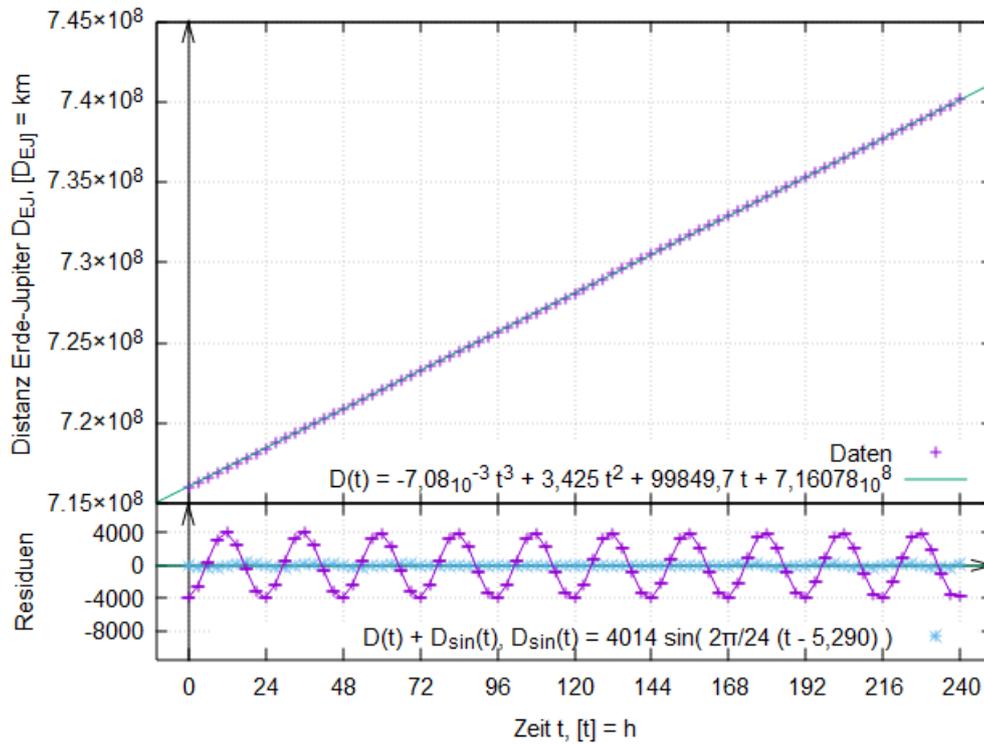


Abbildung 5.5: Modellierung des Abstands von der Erde zum Jupiter.

anhand des Pixelabstands der Bilder berechne, forme ich nach ihm um und erhalte den Korrekturfaktor

$$\frac{r}{a \theta D(t)} \cdot \text{Bahnfunktion} . \quad (5.6)$$

Der Parameter a kürzt sich und r wird die neue zu bestimmende Größe.

Die Korrektur des Phasenwinkels

In Analogie zum Abstand modelliere ich den Verlauf des Phasenwinkels. Auch hier ist die Eigenbewegung des Beobachters auf der ausgedehnten Erde in den Daten enthalten. Diese werde ich ebenfalls nicht in die Beschreibung integrieren. Die Residuen in Grafik 5.6 zeigen, dass ich mit

$$B(t) = 2,8 \cdot 10^{-10} t^3 - 2,70 \cdot 10^{-6} (t - 160,9)^2 + 11,3765, [B(t)] = ^\circ, \quad (5.7)$$

eine gute Beschreibung für das Verhalten von Jupiters Phasenwinkel gefunden habe. Ich bin an dessen Änderung interessiert und daher berechne ich, wie in Gleichung 4.4, die Differenz zum Beginn des Beobachtungszeitraums

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \angle \text{STO}(t) - \angle \text{STO}(t = 0) = B(t) - B(t = 0) \\ &= b_3 t^3 + b_2 (t - b_1)^2 + b_0 - (b_2 b_1^2 + b_0) \\ &= b_3 t^3 + b_2 ((t - b_1)^2 - b_1^2) \\ &= b_3 t^3 + b_2 (t^2 - 2b_1 t) = b_3 t^3 + b_2 t (t - 2b_1) \\ &= 2,8 \cdot 10^{-10} t^3 - 2,70 \cdot 10^{-6} t (t - 321,8) . \end{aligned} \quad (5.8)$$

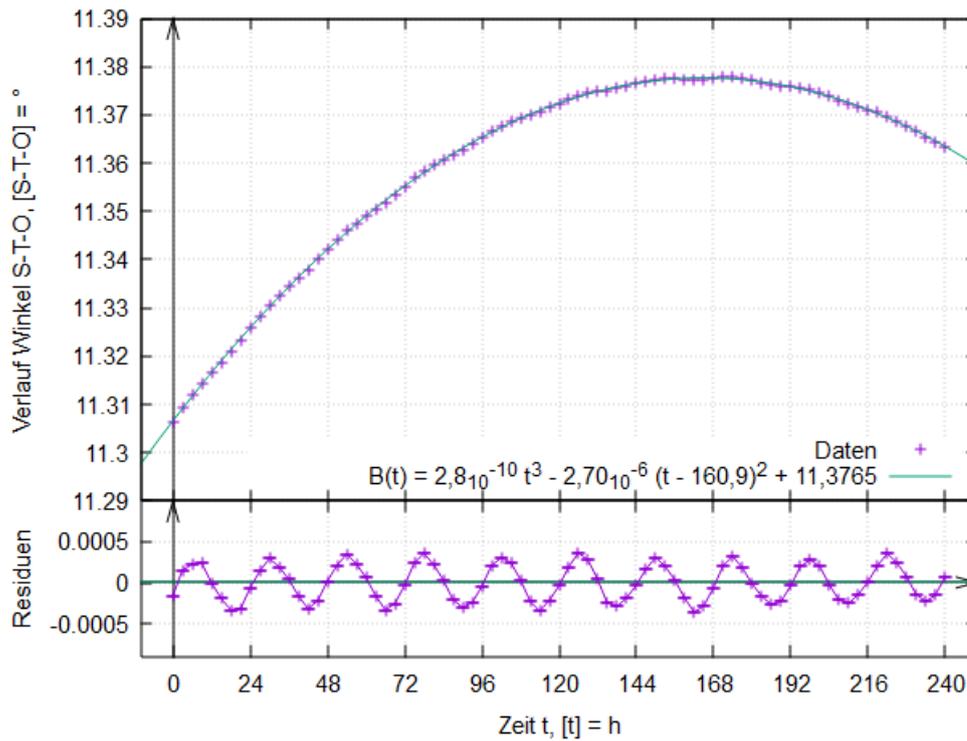


Abbildung 5.6: Der zeitliche Verlauf des Phasenwinkels von Jupiter.

Durch die relative Rotation verändert sich der Knotenwinkel Ω zeitlich mit $\Omega(t) = \Omega + \tau(t)$. Abbildung 4.1 zeigt die Anfangsbedingung $\Omega = 90^\circ$ zu $t = 0$ und der scheinbare Abstand zwischen Mond und Jupiter erreicht hier das Maximum. Als Ausgleich korrigiere ich die Bahnfunktion mit dem Faktor

$$\text{Bahnfunktion} \cdot \cos\left(\frac{\tau(t) \cdot \pi}{180^\circ}\right). \quad (5.9)$$

Der Blickwinkel auf die Bahnebene

In Abschnitt 4.2.3 habe ich den Winkel bestimmt, unter dem ich auf die Bahnebene der Monde schaue. In der Bahnfunktion (4.10) kommt die Inklination in Form des Sinus vor, daher ermittle ich den zeitlichen Verlauf des Terms $\sin i$ aus Gleichung (4.7) während meines Beobachtungszeitraums. Mit den ermittelten Werten in den Tabellen A.7 und A.8 habe ich die, in Abbildung 5.7 dargestellte, Funktion

$$N(t) = -1,27 \cdot 10^{-9} t^2 + 2,504 \cdot 10^{-5} t - 0,0518324 \quad (5.10)$$

gefunden. Auch hier ist zu erkennen, dass die NASA-Daten die Position des Beobachters auf der ausgedehnten Erde berücksichtigen. Da ich die Erde als punktförmig betrachte, werde ich es auch hier vernachlässigen.

Bei der Berücksichtigung der Inklination lässt sich die Bahnfunktion nicht mehr auf eine elementare trigonometrische Funktion reduzieren. Durch die Komposition der eigentlichen Bahnfunktion, mit der Quadrat- und Wurzelfunktion, entfällt die Vorzeichenkonvention bezüglich der Orte links oder rechts vom Jupiter und damit die anschauliche

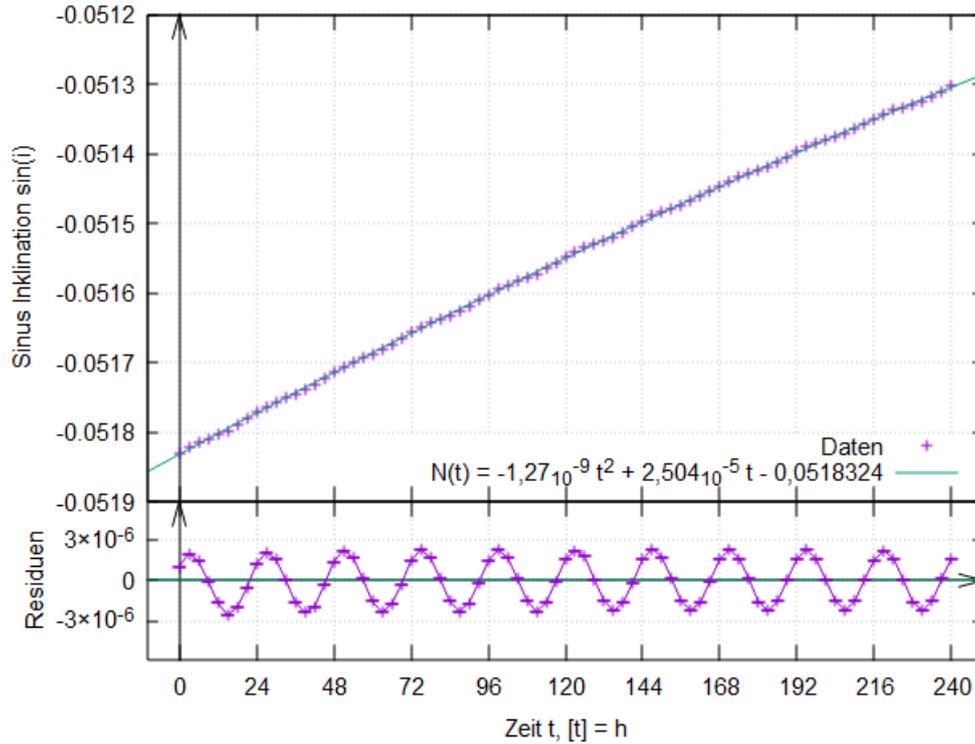


Abbildung 5.7: Modellierung des Blickwinkels auf die Äquatorialebene des Jupiters, hier die Bahnebene der Monde.

Darstellung mittels Sinusverlauf. In Gleichung (4.10) ersetzt die Funktion $N^2(t) = \sin^2 i$ den Sinus der Inklination. Mit Korrekturfaktoren lautet die vollständige Bahnfunktion

$$f(t) = \frac{r \cos(\tau(t) [\text{rad}]) \cdot 10^6}{7,0932 \cdot D(t)} \cdot \sqrt{\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right) N^2(t)}, \quad (5.11)$$

für die Werte $f(t)$ werden die Abstände ohne Vorzeichen übergeben.

Bemerkung

Bei den angegebenen Koeffizienten aller Korrekturfunktionen habe ich die Unsicherheiten bereits berücksichtigt. Sie sind gemäß DIN 1333 (Remeis-Sternwarte, 2023) entsprechend gerundet.

5.3.2 Bestimmung und Beurteilung der Bahnparameter

In diesem Abschnitt bestimme ich die Bahnparameter Radius r [km], Periode T [h] und den notwendigen, aber weniger relevanten Zeitpunkt des hypothetischen Perijovumdurchgangs t_0 [h]. Dazu werde ich Schritt für Schritt die Komplexität erhöhen und die Ergebnisse beurteilen, auch aus didaktischer Sicht.

Für die Fits der Bahnfunktionen nutze ich das Programm *gnuplot* in der Version 5.4 (Williams et al., 2020). Desweiteren werde ich meine Messunsicherheiten mit an den Fit übergeben und *gnuplot* so konfigurieren, dass die resultierenden Unsicherheiten

Tabelle 5.2: Ergebnisse der Fits mit einfacher Sinusfunktion, ohne Korrekturfaktoren.

Größe	Io	Europa	Ganymed	Kallisto
a [px]	$81,49 \pm 0,23$	$129,36 \pm 0,24$	$205,5 \pm 0,4$	$363,73 \pm 0,26$
T [h]	$42,502 \pm 0,009$	$85,187 \pm 0,014$	$171,77 \pm 0,08$	$399,82 \pm 0,10$
t_0 [h]	$-10,560 \pm 0,021$	$11,551 \pm 0,011$	$12,98 \pm 0,05$	$-9,90 \pm 0,05$
r [10^3 km]	$420,9 \pm 1,7$	$668,1 \pm 2,0$	$1\,061 \pm 4$	$1\,879 \pm 4$

nicht bezüglich der Zahlenwerte skaliert werden sollen. Als Folge davon werden Fits der Bahnfunktionen, mit entsprechend gewichteten Datenpunkten, durchgeführt, die Parameter bestimmt und die tatsächlichen Unsicherheiten ausgegeben.

Einfache Auswertung ohne Korrekturgrößen

Ich beginne mit der allgemeinen Sinusfunktion (4.12), dargestellt in Abbildung 5.8. In diesem Schritt ist der Abstand zwischen Erde und Jupiter nicht enthalten, also bekomme ich die Bahnradien als Pixelabstand. Diese verrechne ich mit dem Mittelwert der Distanzen gemäß NASAs *Horizons System* (Solar System Dynamics, 13.03.2024), aufgelistet in Tabellen A.7 und A.8. Es gilt

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N D_n = 728\,100\,901,3 \text{ km} ; N = 81 \\ \delta D &= \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^N (D_n - \bar{D})^2} = 786\,593,9 \text{ km} \approx 0,8 \cdot 10^6 \text{ km} \\ D &= (728,1 \pm 0,8) \cdot 10^6 \text{ km} .\end{aligned}\tag{5.12}$$

Aus den Funktionen-Fits bekomme ich die entsprechenden Werte für a und mit Gleichung (4.3) berechne ich die Bahnradien der Monde. Durch Fehlerfortpflanzung erhalte ich

$$\begin{aligned}\delta r &= \frac{\partial r}{\partial a} \delta a + \frac{\partial r}{\partial D} \delta D = \theta(D \delta a + a \delta D) \\ &= 7,0932 \cdot 10^{-6} \text{ px}^{-1} (728,1 \cdot 10^6 \text{ km} \cdot \delta a [\text{px}] + a [\text{px}] \cdot 0,8 \cdot 10^6 \text{ km}) .\end{aligned}\tag{5.13}$$

Insgesamt ergeben sich aus den einfachen Fits die in der Tabelle 5.2 aufgelisteten Werte. Beim Vergleich mit den Erwartungen (siehe Übersicht Tabelle A.1) stelle ich fest, dass die Perioden nur um wenige Minuten abweichen. Die Periode von Ganymed liegt im Toleranzbereich. Die Bahnradien von Io und Kallisto liegen innerhalb der Unsicherheiten, während hingegen die Orbits von Europa und Ganymed zu klein sind. Europas erwarteter Wert liegt nur knapp oberhalb der Messunsicherheit und der gefundene Orbit von Ganymed ist sogar kleiner als das Perijovum. In Kapitel 6 werde ich untersuchen, ob das für schulische Zwecke gut genug ist.

Modellierung mit Änderung der Distanz zwischen Erde und Jupiter

Im nächsten Schritt modelliere ich die Sinusfunktion (4.12) mit dem Korrekturfaktor (5.6) und der Abstandsfunktion (5.5).

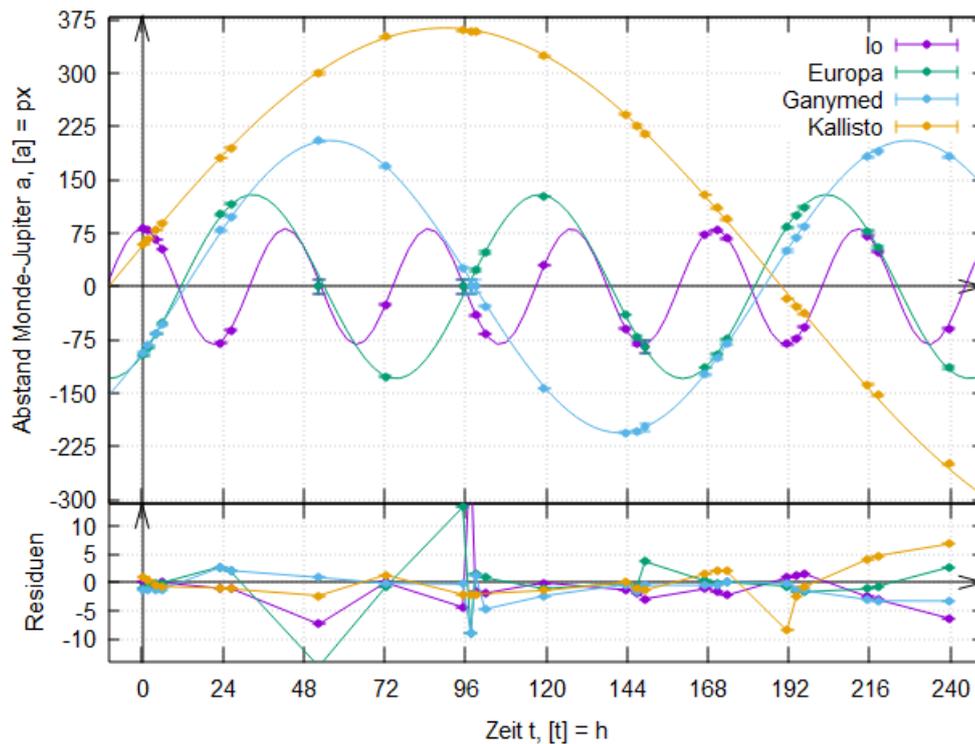


Abbildung 5.8: Modellierung mit der allgemeinen Sinusfunktion ohne Korrekturfaktoren.

Tabelle 5.3: Ergebnisse mit Korrektur des Abstands zwischen Erde und Jupiter.

Größe	Io	Europa	Ganymed	Kallisto
r [10^3 km]	$420,5 \pm 1,2$	$668,2 \pm 1,3$	$1\,064,3 \pm 2,0$	$1\,879,2 \pm 1,4$
T [h]	$42,533 \pm 0,009$	$85,252 \pm 0,014$	$171,87 \pm 0,08$	$399,26 \pm 0,10$
t_0 [h]	$-10,656 \pm 0,021$	$11,461 \pm 0,011$	$12,88 \pm 0,05$	$-9,61 \pm 0,04$

Das Resultat ist in Abbildung 5.9 grafisch dargestellt. Die Werte, die sich aus diesen Fits ergeben, sind in Tabelle 5.3 aufgelistet. Anhand der Residuen und Unsicherheiten fällt auf, dass die Bahnfunktionen aller Monde genauer werden. Die Perioden haben sich, im Vergleich zum vorherigen Schritt, nicht signifikant geändert. Aufgrund steigender Genauigkeit sind nun alle Bahnradien, außer der von Io, zu klein.

Modellierung mit Abstand und veränderlichem Blickwinkel

Im nächsten Schritt füge ich zusätzlich den Korrekturfaktor (5.9) zu den Funktionen-Fits hinzu. In Tabelle 5.4 liste ich die gefundenen Parameter auf, Abbildung 5.10 zeigt das Ergebnis und es ist zu erkennen, dass sich überhaupt nichts geändert hat. Der scheinbare Unterschied, der durch die Änderung von Jupiters Phasenwinkels auftritt, ist nicht signifikant genug. Nach Abbildung 5.6 ist das auch plausibel, die Änderung des \angle STO liegt im Bereich von wenigen Hunderstel Grad.

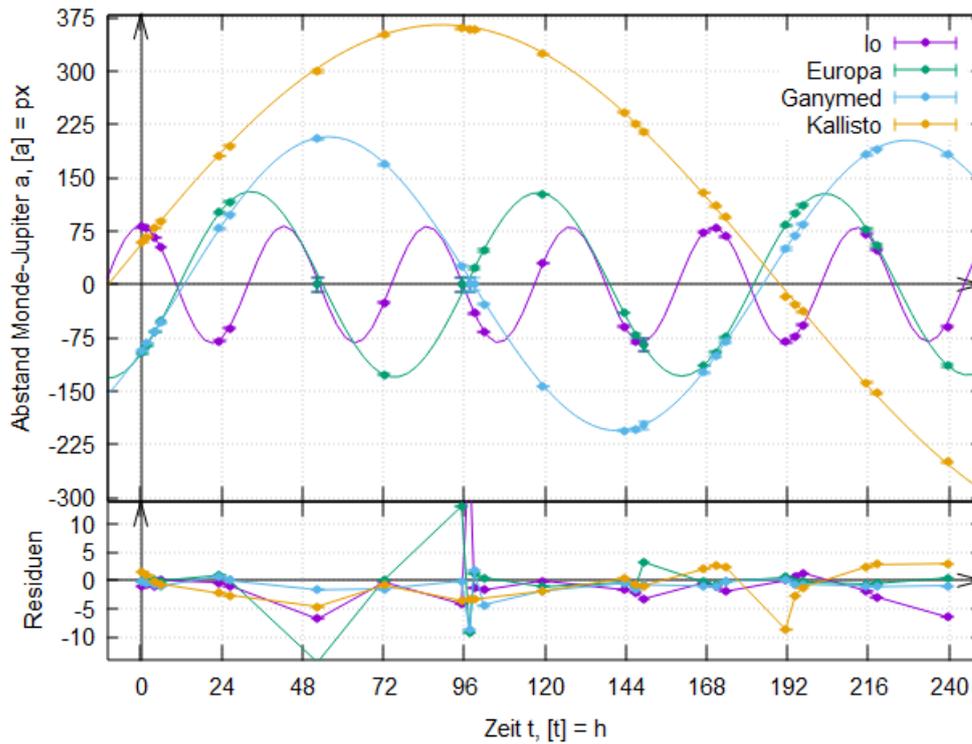


Abbildung 5.9: Modellierung mit Änderung der Distanz zwischen Erde und Jupiter.

Tabelle 5.4: Ergebnisse der Sinus-Fits mit veränderlichem Abstand und sich änderndem Blickwinkel bezüglich Jupiter.

Größe	Io	Europa	Ganymed	Kallisto
$r [10^3 \text{ km}]$	$420,5 \pm 1,2$	$668,2 \pm 1,3$	$1\,064,3 \pm 2,0$	$1\,879,2 \pm 1,4$
$T [\text{h}]$	$42,533 \pm 0,009$	$85,252 \pm 0,014$	$171,88 \pm 0,08$	$399,26 \pm 0,10$
$t_0 [\text{h}]$	$-10,656 \pm 0,021$	$11,461 \pm 0,011$	$12,88 \pm 0,05$	$-9,61 \pm 0,04$

Bahnfunktion mit veränderlicher Distanz, Blickwinkel und berücksichtigter Inklination

Bevor ich meine vollständige Bahnfunktion modelliere, werde ich genauer überprüfen, ob meine Beschreibung der Inklination in Abschnitt 4.2.3 realistisch ist. Dazu verwende ich

$$f(t) = \frac{r \cdot 10^6}{7,0932 \cdot D(t)} \cdot \sqrt{\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right) \sin^2\left(\frac{i \cdot \pi}{180^\circ}\right)}, \quad (5.14)$$

das ist die vollständige Bahnfunktion, ohne Korrektur des Blickwinkels und mit variabler Inklination im Gradmaß. Damit bestimme ich, welche Inklination am besten zu den Daten passen würde und erhalte $i_1 = 3,0 \pm 1,7^\circ$ für Io, $i_2 = 2,7 \pm 1,1^\circ$ für Europa, $i_3 = 2,8 \pm 0,5^\circ$ für Ganymed und $i_4 = 2,59 \pm 0,06^\circ$ für Kallisto. Anhand der Residuen in Abbildung 5.11 ist zu erkennen, dass das Modell sehr gut zu den Datenpunkten passt. Das Intervall $[-2,97^\circ; -2,94^\circ]$ liegt innerhalb der hier gefundenen Werte. Andersherum wäre

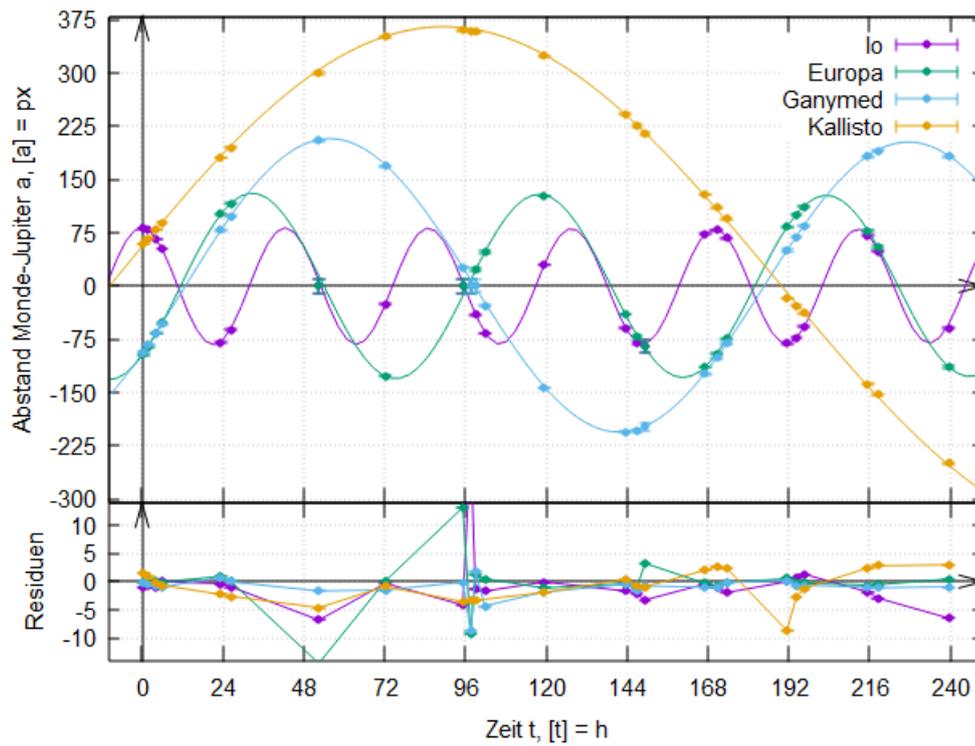


Abbildung 5.10: Modellierung mit Abstand und sich veränderndem Blickwinkel.

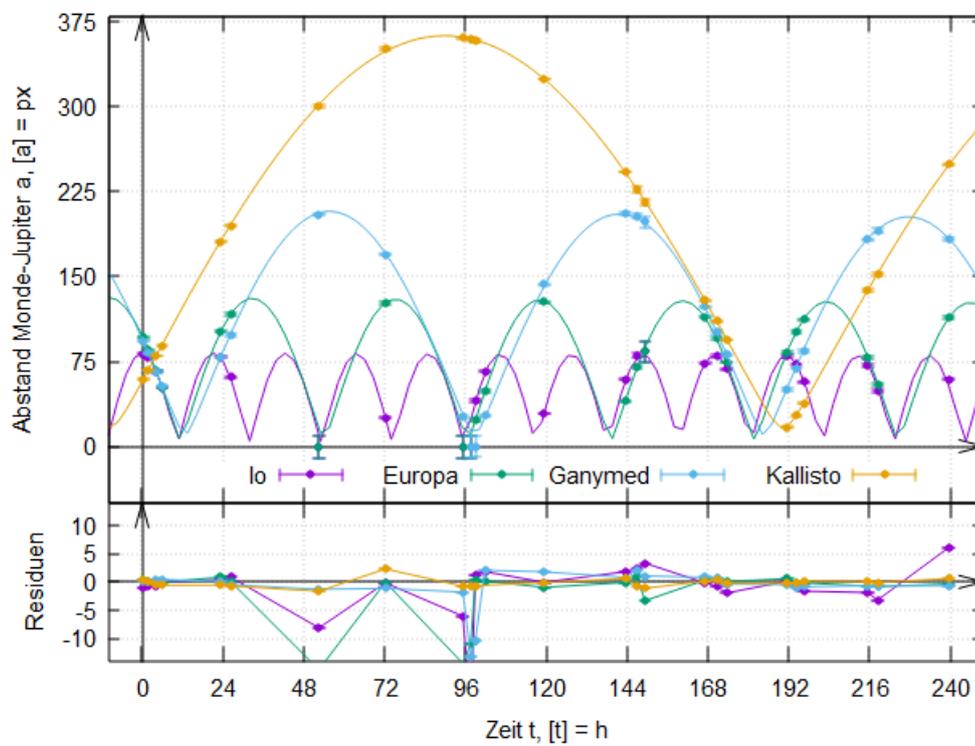


Abbildung 5.11: Grafische Darstellung der Bahnfunktion (5.14) mit variabler Inklination.

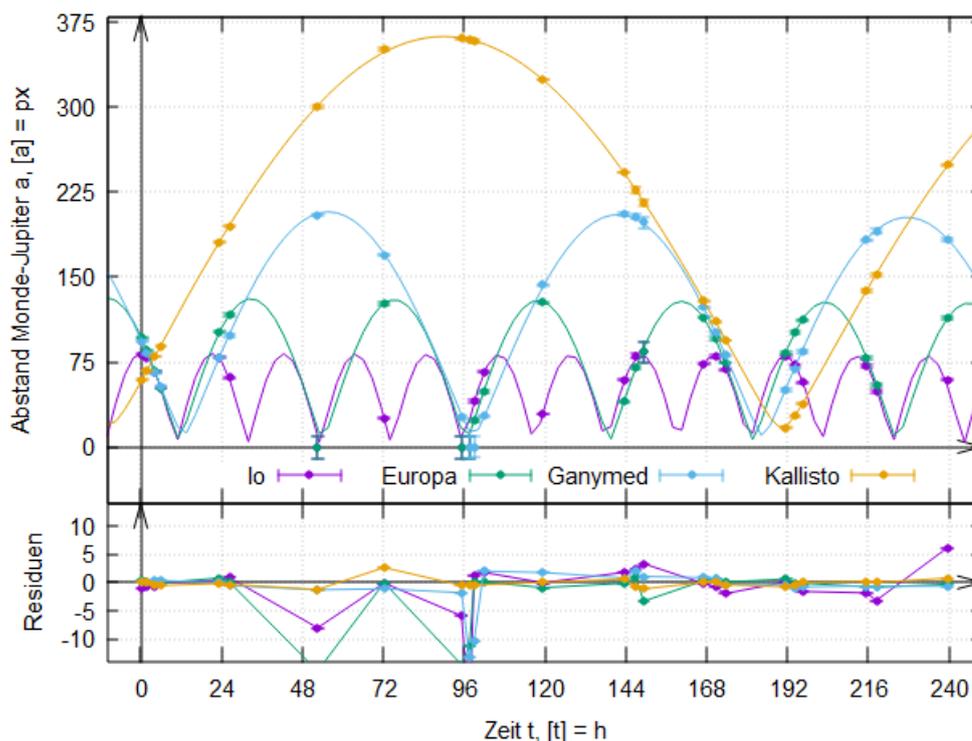


Abbildung 5.12: Modellierung mit Abstand, Blickwinkel und der Berücksichtigung des sich zeitlich ändernden Bahnneigung.

Tabelle 5.5: Gefundene Parameter durch die Modellierung der vollständigen Bahnfunktion, mit Korrektur von Abstand, Blickwinkel und Inklination.

Größe	Io	Europa	Ganymed	Kallisto
r [10^3 km]	$419,7 \pm 1,2$	$667,3 \pm 1,3$	$1062,2 \pm 2,0$	$1862,8 \pm 1,4$
T [h]	$42,539 \pm 0,009$	$85,272 \pm 0,015$	$171,94 \pm 0,08$	$399,69 \pm 0,11$
t_0 [h]	$-10,659 \pm 0,021$	$11,428 \pm 0,011$	$12,83 \pm 0,05$	$-9,40 \pm 0,05$

es besser, allerdings ist hier jedem Mond eine zeitlich konstante Inklination zugeordnet und sie sind nicht komplanar modelliert.

Ich fahre daher mit meiner Beschreibung der Inklination und der Modellierung von Gleichung (5.11) fort. Das Resultat ist in Abbildung 5.12 dargestellt. Anhand der Residuen fällt auf, dass die Modellierung sehr gut zu den Datenpunkten passt, mit der Ausnahme, wenn Jupiter die Monde verdeckt. Dennoch ist bei $t \approx 52$ h deutlich zu erkennen, dass die Funktionen innerhalb der Unsicherheit liegt. Die Unstetigkeitsstellen in der Nähe der Minima der Bahnfunktionen sind Darstellungsfehler des Programms. Aus Erfahrung kann ich bestätigen, dass *gnuplot* kleine abgerundete Spitzen nicht immer einwandfrei darstellt. Kallistos Funktion bei $t = 192$ h zeigt aber, dass es funktioniert.

Die ermittelten Parameter der vier Monde stehen in Tabelle 5.5 und die Perioden haben sich erneut nicht signifikant verändert. Sie liegen nach wie vor recht nah an den tatsächlichen Werten. Die Bahnraden erreichen jetzt allerdings nicht mehr die zu

erwartenden Werte.

Zusammenfassung und Diskussion

Die Umlaufzeiten haben eine unerwartet hohe Genauigkeit, bzw. ungewöhnlich kleine Unsicherheiten. Die ungenauesten Perioden haben eine Unsicherheit von $\delta T \approx 0,1 \cdot 60 \text{ min} = 6 \text{ min}$. Das ist insofern mathematisch plausibel, dass ich die Aufnahmezeiten auf die Minute genau angeben kann und größere Abweichungen mit der Verschiebung von t_0 kaschiert werden.

Durch das Hinzufügen der Korrekturgrößen steigt die Genauigkeit und die Übereinstimmung mit dem Modell. Insbesondere wirkt sich die Berücksichtigung der Veränderungen von Distanz und Inklination als positiv aus. Die Anpassung der Perspektive war für meinen Beobachtungszeitraum nicht nötig, da sie sich kaum verändert hat. Dennoch sind alle Korrekturen, bzw. deren Funktionen nur behelfsmäßige Spezialfälle für meinen Beobachtungszeitraum. Sie sind zwar hier mit der Realität verträglich, aber für einen längeren Beobachtungszeitraum nicht geeignet. Dafür muss ein allgemeingültigerer mathematischer Zusammenhang gefunden werden. Genau das macht aber den wissenschaftlichen Prozess aus: die gegenseitige Überprüfung von Empirie und Theorie. So sind Kapitel 4 und 5 auch als didaktische Demonstration vom physikalischen Arbeiten auf der Metaebene zu verstehen.

Mit besserer Modellierung ist immer deutlicher geworden, dass alle Bahnradien kleiner ausfallen, als die Erwartungen. Abschließend bleibt noch zu klären, woran das liegt.

5.3.3 Die wahre Brennweite des Fernrohres

Tatsächlich kann es vorkommen, dass die Herstellerangaben bezüglich der Brennweite von optischen Instrumenten von der Realität abweichen (Weber, priv. Komm.). Hintergrund ist, dass optische Linsen nicht auf die Brennweite hergestellt werden, sondern auf andere optische Eigenschaften, z.B. die Krümmung, aus der die Brennweite resultiert. Aus Vermarktungsgründen wird trotzdem eine Brennweite angegeben, insbesondere in Verbindung mit der Öffnung, die dann nur ungefähr der tatsächlichen Brennweite entspricht. Die Abweichungen können im Prozentbereich liegen und bei $f = 7 \cdot 115 \text{ mm} = 805 \text{ mm}$, in meinem Fall, sind 8 mm durchaus denkbar.

Um abzuschätzen, ob ich davon betroffen sein könnte, berechne ich mit Hilfe der idealen Bahnradien (Tabelle 4.3), den Bildgrößen der Bahnradien (Tabelle 5.2), dem Abbildungsmaßstab der optischen Bildentstehung und der Linsengleichung für dünne Linsen eine Brennweite (Demtröder, 2017a). Für die Gegenstandsweite verwende ich den Mittelwert der NASA-Daten aus Gleichung (5.12) und nach der Abbildungsgleichung (Demtröder, 2017a) gilt

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \approx \frac{1}{f} \Rightarrow b \approx f, \quad (5.15)$$

für sehr große Gegenstandsweiten (hier in der Größenordnung 10^{11} m). Dementsprechend

gilt, mit $G = r$, $B = a$ und $g = \bar{D}$, nach dem Abbildungsmaßstab (Demtröder, 2017a)

$$\begin{aligned} \frac{G}{B} = \frac{g}{b} &\Leftrightarrow b = \frac{B}{G} \cdot g \approx f \\ f &= \frac{a [\text{px}] \cdot 5,71 \text{ mm}}{r [10^3 \text{ km}] \cdot 10^3} \cdot 728 100 \cdot 10^3 \text{ km}. \end{aligned} \quad (5.16)$$



Abbildung 5.13: Beschriftete Fotografie der Konstellation von Mizar und Alkor im Sternbild großer Wagen bzw. großer Bär.

Damit sich die Mondbahnen in etwa so abbilden lassen, wie ich es gemessen habe, müsste die Brennweite $f = 803,4 \text{ mm}$, für die Daten von Io, $f = 801,5 \text{ mm}$, für die Daten von Europa, $f = 798,2 \text{ mm}$, für die Daten von Ganymed und $f = 803,3 \text{ mm}$, für die Daten von Kallisto betragen. Im Mittel ist das ca. $f = 801,6 \text{ mm}$ und das ist kleiner als die Herstellerangabe.

Zur Verifizierung habe ich mit meiner Ausrüstung die Konstellation von Mizar und Alkor fotografiert (Abbildung 5.13) und das Foto auf die gleiche Weise ausgewertet, wie meine Jupiterfotos. Für die Distanz zwischen Mizar A und Alkor habe ich $s = 480,7 \text{ px}$ ermittelt und den scheinbaren Abstand am Himmel bestimme mit Hilfe der Positionen der Sterne aus der SIMBAD Datenbank (Wenger et al., 2000). Die ausführliche Rechnung dazu befindet sich unter Anhang B.5. Ich erhalte einen Winkelabstand von

$\sigma = 708,6''$ und gemäß der Winkelauflösung pro Pixel (Remeis-Sternwarte, 2023) gilt

$$f = \frac{5,71 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \cdot 206264,8'' \cdot s [\text{px}]}{\text{px} \cdot \sigma [']} \approx 799,0 \text{ mm}. \quad (5.17)$$

Meine Vermutung hat sich damit bestätigt.

Unter der Annahme, dass das von mir verwendete Teleskop tatsächlich eine Brennweite von 801 mm hat, verändert sich die Winkelabdeckung in Gleichung (3.6) zu

$$\theta [\text{rad}] = \frac{0,00571 \text{ mm}}{801 \text{ mm} \cdot \text{px}} = 7,1286 \cdot 10^{-6} \text{ px}^{-1} \quad (5.18)$$

und der Korrekturfaktor in Gleichung (5.11) dementsprechend. Ich werde mit der angepassten Brennweite nochmals einen Fit mit der modifizierten Bahnfunktion

$$f(t) = \frac{r \cos(\tau(t) [\text{rad}]) \cdot 10^6}{7,1286 \cdot D(t)} \cdot \sqrt{\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right) N^2(t)}, \quad (5.19)$$

durchführen, um die Bahnparameter final zu bestimmen. Nun sind die ermittelten Bahnparameter um einiges näher an den Erwartungen. Io und Europa sind beinahe

Tabelle 5.6: Ermittelte Bahnparameter nach Anpassung der Brennweite.

Größe	Io	Europa	Ganymed	Kallisto
r [10^3 km]	$421,8 \pm 1,2$	$670,6 \pm 1,3$	$1\,067,5 \pm 2,0$	$1\,872,1 \pm 1,4$
T [h]	$42,539 \pm 0,009$	$85,272 \pm 0,015$	$171,94 \pm 0,08$	$399,69 \pm 0,11$
t_0 [h]	$-10,659 \pm 0,021$	$11,428 \pm 0,011$	$12,83 \pm 0,05$	$-9,40 \pm 0,05$

„Punktlandungen“, Ganymed ist nach wie vor etwas zu klein, das Perijovum liegt aber innerhalb der Toleranzbereiches und bei Kallisto bin ich nahe am Perijovum. In Abschnitt 4.1 habe ich beschrieben, dass ich mit meiner Methode noch am ehesten bei Kallisto eine Chance hätte, die Ellipse zu vermessen. Möglicherweise lässt sich die große Abweichung dadurch erklären, dass ich in meinem Beobachtungszeitraum tatsächlich den halben Orbit um das Perijovum vermessen habe.

5.4 Drittes Kepler'sches Gesetz und die Masse des Jupiters

Durch die Feststellung, dass ich die Ellipsen nicht messen kann und der Annahme von Kreisbahnen, ist die Bestätigung des ersten Kepler'schen Gesetzes nicht möglich. Das zweite Kepler'sche Gesetz folgt aus den Kreisbahnen trivialer Weise. Es verbleibt der Nachweis des dritten Kepler'schen Gesetzes und ich überprüfe in diesem Abschnitt, ob das mit meinen gefundenen Bahnparametern möglich ist. Außerdem werde ich daraus die Masse des Jupiters bestimmen.

Gemäß Keplers dritten Gesetzes ist die dritte Potenz des Bahnradius' proportional zum Quadrat der Umlaufzeit. Nach Gleichung (4.2) gilt

$$r^3 = \frac{m_J G}{4\pi^2} T^2, \text{ mit } \frac{m_J G}{4\pi^2} = \text{konst.} \quad (5.20)$$

Zur Überprüfung stelle ich, um zu große Zahlen zu vermeiden, die Quadratwurzel der dritten Potenz des Bahnradius' in Abhängigkeit der Umlaufperiode dar. Dazu ist

$$\begin{aligned} \sqrt{r^3} &= \frac{\sqrt{m_J G}}{2\pi} T \\ &= \sqrt{m_J} \cdot \frac{\sqrt{6,6743 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot 3\,600 \text{ s}}}{2\pi \sqrt{\text{kg s h}}} \cdot T \\ &= \sqrt{m_J [\text{kg}]} \cdot \sqrt{6,6743 \cdot 10^{-20} \text{ km}^3 \cdot 1\,800 \pi^{-1} T [\text{h}]}, \\ \left[\sqrt{r^3} \right] &= \sqrt{\text{km}^3}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

der lineare Zusammenhang, womit ich die Jupitermasse mittels gewichtetem Fit bestimme. Die Datenpunkte werden dabei die Tupel $(\sqrt{r^3}, T)$ der vier Monde aus Tabelle 5.6 sein. Das sind die Werte nach der Anpassung der Brennweite. Das Resultat in Abbildung 5.14 zeigt die Gültigkeit und damit den Nachweis des dritten Kepler'schen Gesetzes bei den

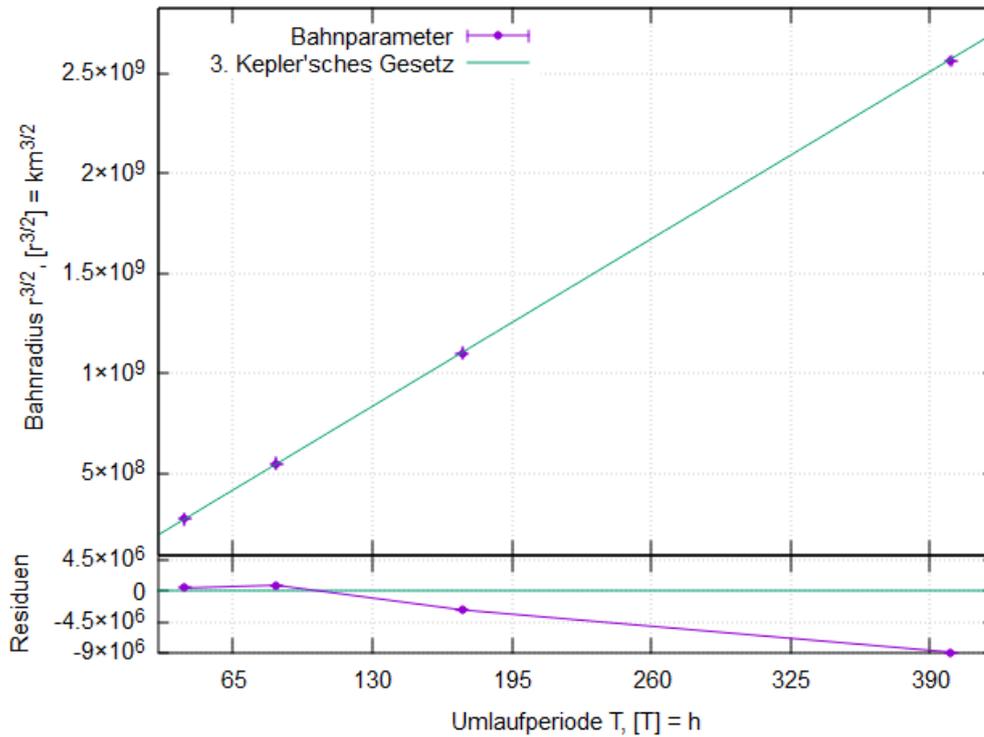


Abbildung 5.14: Grafische Darstellung des dritten Kepler'schen Gesetzes bei den Jupitermonden, v.l.n.r.: Io, Europa, Ganymed und Kallisto.

Galilei'schen Monden des Jupiters. Die große Abweichung von Kallisto habe ich bereits diskutiert. Die gefundene Jupitermasse ist

$$m_J = (1887 \pm 5) \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad (5.22)$$

verglichen mit jener der NASA (Tabelle A.2) ergibt sich

$$1 - \frac{m_J}{m_{J,NASA}} = 1 - \frac{1887}{1898,13} \approx 1 - 0,994 = 0,6\% \quad (5.23)$$

$$0,006 \cdot m_{J,NASA} [m_E] = 0,006 \cdot 317,83 \approx 1,9 m_E.$$

Meine Jupitermasse weicht um etwa 2 Erdmassen oder um 0,6% von jener der NASA ab. Mit dem oberen Wert des Toleranzbereiches bei 1892 kg verfehlt sie nur knapp den Wert der NASA. Im Abschnitt 6.3 werde ich die gleichen Rechnungen für die Daten aus der einfachen Modellierung durchführen.

Kapitel 6

Didaktik

6.1 Grundlagen und Legitimation

Als Didaktik bezeichnet man die Kunst des Lehrens und Lernens. Dementsprechend geht es in der Physikdidaktik im Wesentlichen darum, wie der Physikunterricht gestaltet sein sollte, um bei den Schülerinnen und Schülern einen möglichst hohen Lernerfolg zu erzielen. Als Basis dienen bildungstheoretische, physikalische, gesellschaftliche und pädagogische Einflüsse auf Bildung, Schule und Unterricht, sowie davon abgeleitete Grundlagen der Physikdidaktik selbst (Fischer, 2020). So, wie der Physikunterricht ganzheitlich legitimiert ist (Mikelskis, 2010), soll auch das Projekt, die keplerschen Gesetze aus der Beobachtung der Jupitermonde herzuleiten, innerhalb des Physikunterrichts legitimiert sein. Dabei werden im Schwerpunkt physikalische und pädagogische Aspekte diskutiert.

6.1.1 Bildungstheorie

Pädagogik

Aus pädagogischer Sicht ist die Berücksichtigung von Schülervorstellungen eine der wichtigsten Faktoren. Physikunterricht erzielt deutlich bessere und nachhaltigere Ergebnisse bei Schülerinnen und Schülern, wenn er sich mehr an Schülervorstellungen orientiert, als der klassische. Das haben die didaktischen Studien *Vergleichende Untersuchung zur Einführung eines neuen Lehrgangs*, einmal zum Thema *Einführung in die elementare Optik* von Dietmar Herdt (Herdt, 1990), sowie zu *Einführung in die mechanische Energie und Wärme* von Martin Bader (Bader, 2001) gezeigt. Dabei wurde, neben dem insgesamt deutlich höheren Lernerfolg ihrer Versuchsklassen, auch ein signifikant besseres Abschneiden der Mädchen im Physikunterricht¹ beobachtet (Wiesner, 2017). Zusätzlich ist es wünschenswert, neue Erfahrungen mit Hirn, Hand und Herz zu erleben (Fischer, 2020). Dabei sei bei der Kategorie Herz betont, dass die Beobachtung von Jupiter durch ein Teleskop und die Sichtbarkeit von Wolkenstrukturen und Monden eine gewisse Faszination auslöst. Naturphänomene sollten generell eine Sinneserfahrung sein. Das ist nicht mehr selbstverständlich, da die Realität oft nur noch durch Medien mittelbar erlebt wird und im Physikunterricht Begriffe und Modelle zu hastig eingeführt werden (Fischer, 2020). Durch direkte Sinneswahrnehmungen prägen sich Schülervorstellungen zudem

¹Mädchen gelten im Physikunterricht nach wie vor als benachteiligt.

ganz anders, als durch eine mittelbare Erfahrung.

Gesellschaft und allgemeine Bildungstheorie

Der Vollständigkeit halber seien wichtige, sich überschneidende bildungstheoretische und gesellschaftliche Aspekte erwähnt. Der Physikunterricht ist Teil der Allgemeinbildung und leistet seinen Beitrag zur Erziehung von Schülerinnen und Schülern zu mündigen Bürgern. Das ist in einer naturwissenschaftlich-technisch geprägten Gesellschaft auch notwendig. Zusätzlich geht mit der Fähigkeit des Menschen seine Umwelt zu verändern eine gewisse Verantwortung einher. Nicht zuletzt sollen die im Unterricht vermittelten kritischen, naturwissenschaftlichen Methoden von „der Macht der Gewohnheit“ oder Halbwissen befreien (Fischer, 2020). Letzteres beeinflusst auch Schülervorstellungen und damit die Konzeption des Unterrichts. Schlussendlich wird mit dem Zitat „Auch die spezifischen Chancen des Physikunterrichts, die Idee der Individualisierung durch Schülerversuche, durch forschenden Unterricht oder Projekte zu realisieren, sind in der Bundesrepublik immer noch die Ausnahme.“ (Duit und Tesch, 2005) (Fischer, 2020) deutlich, dass mehr davon im Unterricht wünschenswert ist.

Physik

Aus physikalischer Sicht sind forschender Unterricht oder Projekte gerade deswegen interessant, weil die Physik als Prozess zu verstehen ist und sich Weltbilder im Laufe der Zeit verändern (Fischer, 2020). Am wichtigsten sind aber auch hier die Schülervorstellungen, schließlich soll der Physikunterricht falsche Konzepte durch fundiertes Wissen ersetzen oder die Fähigkeiten vermitteln, dies selbst zu tun.

6.1.2 Schülervorstellungen

Die Gesetze der Himmelsmechanik erfordern besonderes Augenmerk auf die Schülervorstellungen zur Mechanik und durch die Beobachtung des Jupiters sind auch einige der Optik von Bedeutung.

Mechanik

Die Schülervorstellungen zur Mechanik sind in einigen Quellen noch in die Kinematik, den Kraftbegriff selbst und den Zusammenhang zwischen Kraft und Bewegung eingeteilt (Wiesner, 2017). Das sind genau die Bereiche des klassischen Physikunterrichts.

Zu den Fehlvorstellungen der Kinematik gehören z.B. eine Vernachlässigung der Richtung bei der Geschwindigkeit, die Fehlinterpretation der momentanen Bewegungsrichtung und dass durch Trägheit das gesamte Bewegungsmuster beibehalten wird (Wiesner, 2017). Bei der Einführung von Bewegungen und Kräften in der achten Klassenstufe geht der aktuelle Lehrplan für Gymnasien in Bayern bereits einen anderen Weg (Räde, 2024), Genaueres dazu folgt im Abschnitt 6.2. Dieser neue Weg könnte dazu führen, dass die Vorstellungen zur Kinematik an Bedeutung verlieren.

Schülervorstellungen beim Kraftbegriff sind, dass nur aktive oder bewegte Körper eine Kraft haben, Kraft während der Bewegung verbraucht wird und dass eine Kraft nötig ist, um eine Bewegung aufrecht zu erhalten (Mikelskis, 2010, Wiesner, 2017). Im Alltag

sind Phänomene wie Schwerkraft und Reibung selbstverständlich und in der Intuition über Physik bereits integriert (Mähler, 2006). Eine weitere Vorstellung zum Kraftbegriff ist, dass Kraft als potenzielle Fähigkeit wahrgenommen wird, ohne etwas bewirken zu müssen, was dem Energiebegriff sehr nahe kommt (Wiesner, 2017). Weiterhin wird Kraft als etwas Übertragbares zwischen zwei Körpern angesehen, was an die Impulserhaltung beim Stoßprozess erinnert (Wiesner, 2017).

Optik

Die Schülervorstellungen der Optik umfassen Farben, den Sehvorgang selbst, die Ausbreitung des Lichts, Spiegel- und Linsenabbildungen (Wiesner, 2017).

Zu den Vorstellungen über den Sehvorgang und die Farben gehören, dass Licht für die Wahrnehmung nicht ins Auge fallen muss, an Oberflächen, mit Ausnahme des Spiegels, nicht gestreut wird (Wiesner, 2017), dass sich weißes Licht nicht aus verschiedenen Farbeindrücken zusammensetzt und farbiges Licht erst durch Auftreffen auf farbige Oberflächen entsteht. Die Ausbreitung des Lichts wird bei einem Teil der Schülerinnen und Schüler nicht als ein dynamischer Vorgang verstanden, sondern als eine statische Erscheinung, die hell macht und auf Gegenständen liegen bleibt (Wiesner, 2017). Meiner Meinung nach hängen sie direkt zusammen, denn wenn die Sinneswahrnehmung verstanden ist, leuchtet die Dynamik der Ausbreitung ein und umgekehrt. Dabei unterstützt die Thematisierung des menschlichen Auges, mit den verschiedenen Sinneszellen, im Biologieunterricht der achten Klasse (Räde, 2024).

Beim Spiegel gibt es Schülervorstellungen, die besagen, dass der Spiegel Helligkeit zurückwirft, links und rechts vertauscht wird (anstatt vorne und hinten), dass der Spiegel wie eine Leinwand als Träger des Spiegelbildes funktioniert und das Bild nicht hinter dem Spiegel ist (Wiesner, 2017). Bei der Abbildung durch Sammellinsen sind einige Kinder der Meinung, dass das Bild als Ganzes durch die Linse wandert und dass bei einer beschädigten oder teilweise abgedeckten Linse ein Teil des Bildes fehlt (Wiesner, 2017). Letztere werden durch die Vorstellungen zur Bildentstehung bei einer Lochblende bestätigt, denn durch große Blendenöffnungen wandern die Bilder als Ganzes (Wiesner, 2017). Diese Konzepte bauen stark auf den vorherigen auf und mir erscheinen sie als Folge von nicht angenommenen Grundlagen.

6.1.3 Legitimation

Die Herleitung der Kepler'schen Gesetze aus der Beobachtung der Jupitermonde beinhaltet einen direkten Zusammenhang zwischen einem erlebbaren Naturschauspiel, wissenschaftlicher Arbeit und einem physikalischen Modell. Sie würde auch dem Anspruch nach forschenden oder projektorientierten Unterricht genügen. Die Gesetze der Planetenbewegung sind essentieller Bestandteil einer historisch bedeutsamen Änderung des Weltbildes und eng mit der Renaissance und der Aufklärung verbunden. Diese Epochen haben auch in vielen anderen Schulfächern eine sehr hohe Bedeutung.

Die Bearbeitung eines astronomischen Phänomens könnte den Lernschwierigkeiten bei idealisierten physikalischen Modellen begegnen, die durch alltagsgeprägte Schülervorstellungen verursacht werden. Insbesondere, weil hier beim Zusammenhang von Kraft und Bewegung keine Idealisierungen, wie Vernachlässigung von Reibung oder Wärmeverlust, erfolgen. Die Energieerhaltung wird konkret angewendet und ohne Impulserhaltung,

inform von Drehimpulserhaltung, würde kein Orbit zustande kommen. Die „wahre Natur“ von Kräften und Bewegung ist damit erlebbar.

Bei der Anfertigung von astronomischen Fotografien ist Wissen über optische Geräte notwendig. Für eine quantitative Auswertung der Beobachtung von Jupiter und seinen Monden müssen optische Berechnungen durchgeführt werden. So werden Konzepte der Optik nicht nur durch die Anwendung in der Praxis verständlich, sondern die Beobachtung eines Faszination auslösenden Objektes sollte auch die Lernmotivation erhöhen.

Die Struktur dieser Arbeit habe ich dabei am normalen wissenschaftlichen Prozess orientiert. Das Wechselspiel von Theorie und Empirie macht deutlich, wie physikalische Gesetze erforscht werden. Genau das kann bei der Umsetzung meines Projekts auch von Schülerinnen und Schülern nachvollzogen werden und so entsteht ein realistischer Eindruck von Forschung.

6.2 Voraussetzung des Lehrplans

Da diese Arbeit als Grundlage für das Lehramt an Gymnasien in Bayern dient, wird der Lehrplan für bayrische Gymnasien die Ausgangslage liefern. Eine vollständige Herleitung, wie die im Kapitel 2 zur theoretischen Herleitung, ist nicht trivial und benötigt Wissen der höheren Mathematik und einige physikalische Grundlagen.

6.2.1 Inhalte

Die mathematischen Themen dieses Projekts umfassen Vektorgeometrie bis einschließlich Skalar- und Vektorprodukt und Grundlagen der Vektoranalysis, Differenzial- und Integralrechnung von rationalen Funktionen und Grundlagen zum Lösen von Differenzialgleichungen (DGLn), die Geometrie zur Ellipse und zum Dreieck, einschließlich Trigonometrie, sowie trigonometrische Funktionen und Kugel- und Polarkoordinaten. Aus der Physik benötigt man Wissen über das Newton'sche Gravitationsgesetz, wie man seine Axiome bei Berechnungen anwendet, potenzielle und kinetische Energie, mechanische Arbeit sowie Energieerhaltung, Drehimpuls und Drehimpulserhaltung und das Wissen um die Kepler'schen Gesetze selbst. Darüber hinaus sind für die Auswertung der Daten noch Themen, wie Normalverteilung, Fehlerrechnung und die Softskills Organisieren und Durchführen von Experimenten wichtig, sowie Grundkenntnisse über Computermodellierung. Die Inhalte dieses Abschnitts sind, sofern nicht anders vermerkt, dem LehrplanPLUS nach Råde (2024) entnommen.

Schulfach Mathematik

In Mathematik werden ab der siebten Klasse immer wieder Dreiecke behandelt, inklusive Trigonometrie in der neunten Klassenstufe. Der Kreis wird ab Klasse acht immer wieder thematisiert, allerdings nie als Spezialfall einer Ellipse. Auf Dreieck und Kreis aufbauend werden in der zehnten Klassenstufe die trigonometrischen Funktionen und das Bogenmaß, sowie die Umrechnung der beiden Winkelmaße behandelt. Ab der elften Klasse ist, laut Lehrplan, die Differenzialrechnung vorgesehen und bis dahin sind alle großen Funktionsklassen im Stoff enthalten gewesen. Das umfasst lineare, ganz- und gebrochenrationale Funktionen, sowie allgemeine Grundlagen von Logarithmus- und

Exponentialfunktionen, allerdings nicht die natürliche Exponentialfunktion, die ist erst Thema in Klassenstufe zwölf. Über alle betroffenen Schuljahre hinweg wird die affine Transformation von Funktionen im Koordinatensystem immer wieder thematisiert. In der zwölften Klasse wird die Vektorgeometrie, inklusive Skalar- und Vektorprodukt behandelt. Im Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung tauchen die Begriffe Erwartungswert und Standardabweichung auf. In der 13. Klasse werden die Integralrechnung, ausführliche Anwendungen zusammen mit der Differenzialrechnung und außerdem die Normalverteilung behandelt.

Schulfach Physik

Die Physik beginnt teilweise in der siebten Klasse mit Natur und Technik, das wird hier nicht betrachtet. Als namentliches Schulfach beginnt die Physik im achten Schuljahr, mit der Einführung von Kräften und Bewegung. Eine zentrale Kompetenz ist dabei das Verstehen von Bewegungen aus dem Alltag in zwei Dimensionen. Dazu gehören sowohl der Einsatz computergestützter Auswertungen mit Hilfe sogenannter Stroposkop-aufnahmen, als auch die Thematisierung von Kraft und Geschwindigkeit als vektorielle Größen, inklusive der Vektoraddition. Die Kraft wird mit dem zweiten Newton'schen Axiom und der Gleichung $F\Delta t = m\Delta v$ behandelt, dazu gehört auch die beschleunigte Bewegung und ein Schülerexperiment zur Bestimmung der Fallbeschleunigung. Weiterhin ist in der achten Klasse die Optik mit Linsenabbildungen ein Stoffgebiet, dazu gibt es auch ein Schülerexperiment und der naturwissenschaftlich-technologische (NTG) Zweig sieht explizit die Unterrichtung des Fernrohres vor. In der neunten Klassenstufe geht es um Arbeit, mechanische Energie und Leistung, mit den entsprechenden elementaren Berechnungen. Das Stoffgebiet umfasst verschiedene Energieformen, wie potenzielle und kinetische Energie, Energieerhaltung und Umwandlung mit einer Diskussion über „Verbrauch“ von Energie. Dabei wird auch Systemverhalten mit Energieauf- und -abgabe und der Begriff der Wegunabhängigkeit thematisiert. Der Lehrplan sieht für Klasse zehn den Impuls und dessen Erhaltungssatz vor, dabei liegt, wie schon in der achten Klasse, der Fokus auf zweidimensionalen Bewegungen. Außerdem werden für die Beschreibung von Bewegungen ganz konkret lineare und quadratische Funktionen verwendet und der NTG-Zweig beinhaltet computergestützte Modellierungen von Würfeln. In der elften Klasse geht es um Kreisbewegungen mit Winkelgeschwindigkeit, Zentripetalkraft und einem Schülerexperiment, um die Einflussgrößen auf diese Kraft zu untersuchen. Weiterhin geht es um das Gravitationsgesetz und astronomische Weltbilder und dazu gehören die Kepler'schen Gesetze. Sie werden in erster Linie im historischen Kontext behandelt, der NTG-Zweig sieht die Methode der kleinen Schritte und die Modellierung der Planetenbahnen am Computer vor. Klassenstufe zwölf enthält thematisch keine Mechanik, aber beim Elektromagnetismus werden Teilchenbahnen in elektrischen oder magnetischen Feldern beschrieben, darunter auch die Kreisbahn von Elektronen im Fadenstrahlrohr. Im grundlegenden Anforderungsniveau ist es im eigenverantwortlichen Arbeiten aufgeführt. Im erhöhten Anforderungsniveau werden die Bahnkurven von Elektronen in verschiedenen elektrischen und magnetischen Feldern untersucht und dabei im experimentellen Arbeiten Messunsicherheiten und -abweichungen behandelt. Organisieren und Durchführen von Experimenten sind insbesondere beim erhöhten Anforderungsniveau der Qualifikationsstufen essentieller Bestandteil. Für die 13. Klasse gibt die Lehrplanalternative Astrophysik, hier sind ganz konkret die Themen Gravitation mit zugehörigem Potenzial und die

mathematischen Grundlagen der Ellipse enthalten. Es sollen auch konkret Massen und Bahnparameter ausgewählter Objekte im Sonnensystem bestimmt werden.

6.2.2 Beurteilung

Mathematikunterricht

Im Lehrplan für Mathematik fehlen Elemente der Vektoranalysis, wie Gradient, Divergenz und Rotation. Das stellt in diesem Fall aber kein Problem dar, denn sie werden hier nur für kurze Beweise verwendet und deren Resultat lässt sich in der Schule auch „unmathematisch“ plausibel machen. Differenzialgleichungen werden nicht thematisiert, obgleich man das Lösen bestimmter gewöhnlicher linearer DGLn mit Schulwissen durch Regression angehen kann. Weiterhin werden krummlinige Koordinatensysteme nicht explizit behandelt. Der Lehrplan in Mathematik ist sehr allgemein gehalten und fokussiert sich auf das Üben von Rechentechniken. Mit der besonderen Betonung von Anwendungsaufgaben zur Integral- und Differenzialrechnung in Klassenstufe 13 wird deutlich, dass Anwendungsbeispiele oder sogenannte Transferaufgaben die Spitze und nicht die Basis der Ausbildung darstellen. An einigen Stellen ist ebenfalls ersichtlich, dass die Mathematik gegenüber der Physik nachzieht, z.B. verwendet man in der Physik schon in der achten Klasse Grundlagen der Vektorrechnung, wobei die Mathematik das erst in der zwölften Klasse behandelt. Der Mathematikunterricht lässt insgesamt nur wenig Spielraum, um die Jugendlichen bei einem Projekt zu den Kepler'schen Gesetzen zu unterstützen. Eine Ausnahme stellen dabei die affinen Transformationen der Funktionen im Koordinatensystem dar. Das Wissen um die Verschiebung mit Hilfe von Parametern ist essentiell für das Modellieren am Computer. Leider wird das dabei nicht deutlich, es fehlt der Zusammenhang über die Jahrgänge und die verschiedenen Funktionsklassen hinweg.

Physikunterricht

Der Lehrplan zum Physikunterricht lässt den Drehimpuls und die Fehlerrechnung vermissen, jedenfalls tauchen beide Themen nicht explizit auf. Es ist nicht ganz klar, ob bei der Behandlung von Messunsicherheiten in der zwölften Klasse, im erhöhten Anforderungsniveau, eine Fehlerrechnung vorgesehen ist. In Astrophysik der 13. Klassenstufe ist von der potenziellen Energie im Gravitationsfeld im Zusammenhang mit der Ellipse die Rede. Das deutet auf das effektive Potenzial, wie in (2.18), mit Drehimpuls hin. Da dieser aber nicht aufgeführt ist, mangelt es an Eindeutigkeit. Im Lehrplan der Fachoberschule (FOS), der das Drehmoment beinhaltet (Räde, 2024), wird der Drehimpuls ebenfalls nicht erwähnt. Die Berechnung der Bahnen von geladenen Teilchen in verschiedenen elektromagnetischen Feldern weist Parallelen zu den Planetenbahnen auf. Die Verwendung von Funktionen und vektorwertigen Größen in der Physik sind eine nützliche Kompetenz, um die Theorie der Planetenbahnen zu verstehen. In der elften Klasse findet die erste Berührung mit den keplerschen Gesetzen statt und mit konkreten Berechnungen zu Kreisbahnen wird ein grundlegender Eindruck der Physik dahinter vermittelt. Energie- und Impulserhaltungssätze der neunten und zehnten Klassenstufen ist essentielle Voraussetzungen für das Verständnis. Das Gravitationsgesetz und die Newton'schen Axiome sind im Lehrplan enthalten. Die Stroboskopaufnahmen, die immer wieder Erwähnung finden, sind

durchaus mit den Einzelfotos in diesem Projekt zu vergleichen und das Prinzip daraus Informationen abzuleiten auch.

Pädagogischer Spielraum der Lehrkräfte

An den Stellen, wo der Lehrplan nicht eindeutig ist oder Lücken vorhanden sind, ist es einer Lehrkraft immer möglich mit geeigneten Themen zu ergänzen oder mit anderen Beispielen den Horizont zu erweitern. Im Mathematikunterricht ist es ratsam, Linearfaktoren zu behandeln und konsequent über alle Klassenstufen und Funktionsklassen deutlich zu machen. Das ist genau das fehlende Bindeglied, um Zusammenhänge bei den Schülerinnen und Schülern herzustellen und das Lernen zu erleichtern. Dazu können immer wieder Anwendungsbeispiele einfließen, die die affinen Transformationen mit der Modellierung von Funktionen verknüpfen. Das Wissen über krummlinige Koordinatensysteme sollte an den richtigen Stellen von der Lehrkraft stets mit eingebaut werden. Möglichkeiten bieten sich bei der Interpretation von Daten und Statistiken in mehreren Klassenstufen an, sowie explizit Polarkoordinaten bei den komplexen Zahlen im Vertiefungskurs der Klassenstufe zwölf (Räde, 2024). Schülerinnen und Schüler kommen bereits mit krummlinigen Koordinaten beim Gradnetz der Erde im Geographieunterricht der fünften Klasse (Räde, 2024) in Berührung. In der achten Klasse in Physik kann beim Thema vektorielle Größen, durch Zerlegen und Zusammensetzen von Kräften, schon anschaulich die Vektoraddition geübt werden. Der Drehimpuls wäre, sobald das Vektorprodukt bekannt ist, sehr gut in den Unterricht integrierbar. Die Impulserhaltung ließe sich analog auf den Drehimpuls erweitern und dessen Erhaltungssatz könnte man mit Hilfe von Kreiseln sehr einprägsam, sogar in den unteren Klassenstufen, demonstrieren. Noch alltagsnäher wäre es anhand des Fahrradfahrens. In Astrophysik bietet sich ohnehin ein Exkurs zum Drehimpuls an. Die Diskussion über Messunsicherheiten und -abweichungen ist nicht genauer spezifiziert und damit liegt es im pädagogischen Ermessen der Lehrkraft hier die Fehlerrechnung zu behandeln.

6.2.3 Folgerungen für die Schule

Im Vertiefungskurs Astronomie der 13. Klasse bietet sich formal die einzige Möglichkeit, die theoretische Herleitung nachzuvollziehen, da der mathematische Wissensstand erst hier weit genug fortgeschritten ist. Die Herleitung der Kepler'schen Gesetze wird in der Fachliteratur (Demtröder, 2021, Nolting, 2018) in der Regel vorgeführt und liegt nicht als Übungsaufgaben für Physikstudierende vor. Daher werden die Schülerinnen und Schüler das nicht selbst können. Die geeignetste Unterrichtsform wird das Lehrgespräch sein und manche Sachverhalte werden zusätzlich heruntergebrochen werden müssen. Die Elemente, welche Vektoranalysis benötigen, können anschaulich plausibel gemacht werden und das Lösen der Differenzialgleichung (2.21) gelingt mit einer formlosen Überlegung, welche Funktionsklassen dafür in Frage kämen. Desweiteren ist Vorarbeit zur Ellipse, zum Drehimpuls und zum effektiven Potenzial nötig. Letzteres ließe sich, bei mathematischen Schwierigkeiten des Kurses, mit Hilfe der bekannten Kreisbewegung als Gleichgewicht zwischen Bahngeschwindigkeit und Zentripetalkraft plausibel machen.

Ab der elften Klasse ist der empirische Weg, mit Hilfe der Reduktion auf Kreisbahnen, möglich. Hier sind Grundlagen der Astronomie und die Kepler'schen Gesetze im Lehrplan vorgesehen (Räde, 2024). Die Modellierung, auf Basis von trigonometrischen Funktionen,

kann von Schülerinnen und Schülern selbst durchgeführt werden. Diese Funktionsklasse wird in der zehnten Jahrgangsstufe in Mathematik behandelt (Räde, 2024).

In kleineren Klassenstufen empfehle ich nicht, gezielt darauf hinzuarbeiten. Die Abweichungen vom Lehrplan wären zu groß, die Schülergruppen zu heterogen und die Zusammenhänge nicht gegeben.

Möglichkeiten, um dieses Thema als Teil eines Wahlkurses abzuhalten, werden sich immer bieten oder während einer Projektwoche, wie die meisten Schulen sie durchführen. Mit hoher Wahrscheinlichkeit wird die Lehrkraft die Ausrüstung allerdings privat zur Verfügung stellen müssen. Alternativ wäre eine ganze Projektfahrt in Zusammenarbeit mit einer Sternwarte denkbar, denn Schulen führen auch Skikurse, Theaterfahrten und andere außerschulische Aktivitäten durch. Zu guter Letzt stehen noch das Wissenschafts- oder Projektseminar zur Verfügung.

sonstige Rahmenbedingungen

Da dieses astronomische Projekt nächtliche Beobachtungen erfordert, sind weitere Rahmenbedingungen zu klären. Dazu gehört unter Anderem, ob ein Arbeiten an der Schule, nach Schulschluss versichert wäre. Desweiteren müssen die Erziehungsberechtigten der Kinder damit einverstanden sein, sofern sie noch nicht volljährig sind.

Nächtliche Beobachtungen schränken zusätzlich die Erholung während des Schulalltags ein. Die Beobachtungstätigkeit könnte zum Beispiel in Kleingruppen durchgeführt und die Beobachtungszeit aufgeteilt werden. Eine Schulklasse, typischerweise mit 20 bis 30 Kindern, kann auf zehn Beobachtungsnächte so aufgeteilt werden, dass pro Nacht zwei oder drei Schülerinnen oder Schüler beobachten. Damit ist, aus Gründen, die ich hier nicht vertiefen möchte, nie eine Jugendliche oder ein Jugendlicher mit einer Lehrkraft allein. Desweiteren wird bei Aufteilung der Beobachtungstätigkeit die nächtliche Ruhezeit für einzelne Schülerinnen oder Schüler nur einmalig eingeschränkt sein.

6.3 Das dritte keplersche Gesetz und Jupiters Masse

In Abschnitt 5.4 habe ich, mit den Ergebnissen aus meiner modifizierten vollständigen Bahnfunktion (5.14), das dritte Kepler'sche Gesetz nachgewiesen und eine Masse des Jupiters bestimmt. In diesem Abschnitt möchte ich analog verfahren, aber diesmal mit den Werten, die ich mit der einfachen Bahnfunktion, die allgemeine Sinusfunktion (4.12), bestimmt habe. Für die Tupel $(\sqrt{r^3}, T)$ der Monde verwende ich diesmal die Daten aus Tabelle 5.2. Hintergrund ist, dass Schülerinnen und Schüler, ab der empfohlenen elften Jahrgangsstufe, mit der allgemeinen Sinusfunktion arbeiten und einen Mittelwert aus einem Datensatz von Abständen zum Jupiter berechnen können.

Gemäß Abbildung 6.1 ist der Nachweis des dritten Kepler'schen Gesetzes, auch mit Hilfe der mit Schulwissen kompatiblen Bahnfunktion, erbracht. Außerdem habe ich es ohne die Anpassung der Brennweite nachgewiesen und somit kann sich, für die Verwendung in der Schule, auf die Herstellerangaben verlassen werden. Die gefundene Jupitermasse ist

$$m_J = (1\,880 \pm 8) \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad (6.1)$$

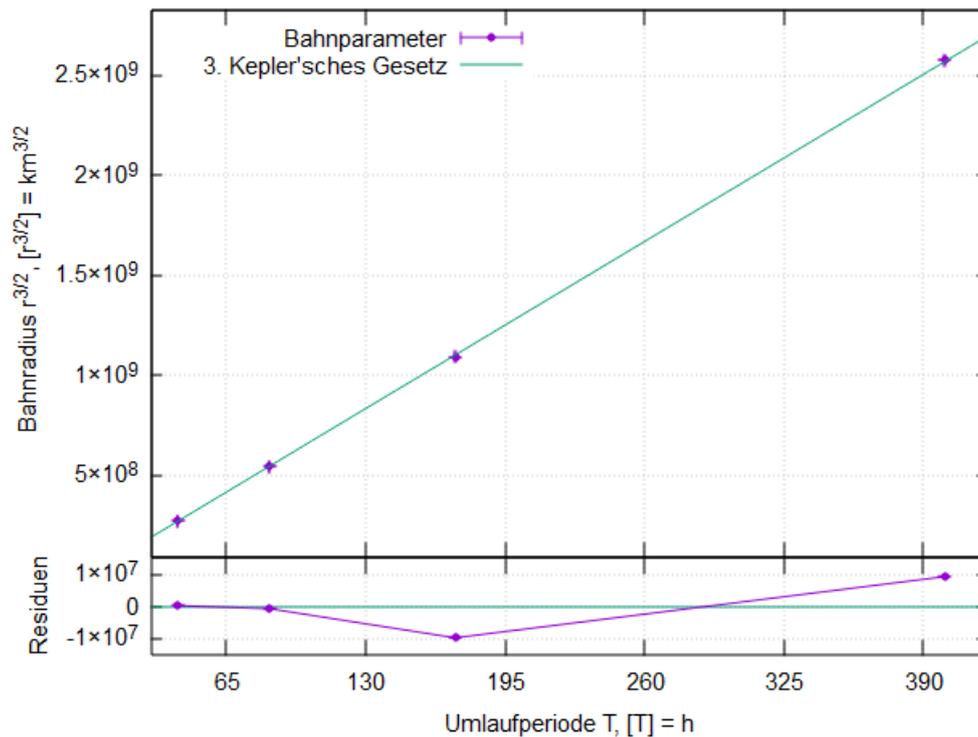


Abbildung 6.1: Grafische Darstellung des dritten Kepler'schen Gesetzes bei den Jupitermonden, v.l.n.r.: Io, Europa, Ganymed und Kallisto.

verglichen mit jener der NASA (Tabelle A.2) ergibt sich

$$1 - \frac{m_J}{m_{J,NASA}} = 1 - \frac{1880}{1898,13} \approx 1 - 0,99 = 1\% \quad (6.2)$$

$$0,01 \cdot m_{J,NASA} [m_E] = 0,01 \cdot 317,83 \approx 3,2 m_E .$$

Die hier bestimmte Jupitermasse weicht um etwa 3,2 Erdmassen oder um 1 % von jener der NASA ab. Der Wert der NASA liegt nicht innerhalb der Unsicherheit. Für Schülerinnen und Schüler sollte die Abweichung von 1 % zur „richtigen“ Jupitermasse, die sie so selbst bestimmen können, aber ein beeindruckendes Ergebnis sein.

Kapitel 7

Schlussfolgerung

Ich habe in dieser Arbeit Jupiter und seine vier Galilei'schen Monde mit astronomischer Amateurausrüstung beobachtet und fotografiert. Auf 25 Fotos, über einen Zeitraum von zehn Tagen, konnte ich so Momente von Bewegungsabläufen festhalten, welche von elementarer astrophysikalischer Bedeutung sind; die Bewegung der Jupitermonde als Äquivalent zu den Planetenbewegungen. Ausgehend von der Newton'schen Mechanik, habe ich die Gesetze der Planetenbewegung, bzw. die Kepler'schen Gesetze, hergeleitet. Diese nichttriviale Bewegung habe ich, unter optischen und astronomisch-praktischen Aspekten, auf ein Niveau reduziert, sodass es didaktisch sinnvoll mit dem Schulwissen vereinbar ist. Meine Aufnahmen habe ich vermessen und aus den Positionsdaten der Himmelskörper die scheinbaren Abstände der Monde zum Jupiter bestimmt. Den zeitlichen Verlauf habe ich einerseits auf dem Niveau von Schulwissen und andererseits mit einer fortgeschrittenen Methode modelliert. Mit Hilfe dieser Modellierungen habe ich Parameter der Mondbahnen bestimmt und damit das dritte Kepler'sche Gesetz nachgewiesen. Für einen qualitativen Test meiner ermittelten Werte habe ich daraus die Gravitationskonstante und die Jupitermasse errechnet und sie, mit zufriedenstellendem Ergebnis, mit den tatsächlichen Werten verglichen.

7.1 Weiterführung des Projekts

Die Untersuchung der Kepler'schen Gesetze anhand der Jupitermonde, welche, nach Johannes Keplers Vorschlag, von Simon Marius benannt wurden (Gaab, 2018), hört mit dieser Arbeit nicht auf. Ich habe, aus genannten Gründen, nicht den Nachweis über die elliptischen Bahnen erbringen können. Genau hier kann mit Methoden, die nicht auf eine Verträglichkeit mit dem Schulalltag Rücksicht nehmen müssen, angesetzt werden.

Ich kann mir beispielsweise sehr gut eine Spektralanalyse des von den Jupitermonden reflektierten Lichts vorstellen, um damit, anhand des Dopplereffekts, eine Radialgeschwindigkeit zu bestimmen. Sollte das möglich sein, so kann jedem scheinbaren Abstand zu Jupiter auch eine Geschwindigkeit zugeordnet werden. So kann der Drehimpuls direkt bestimmt und damit, gemäß der theoretischen Herleitung in Kapitel 2, eventuell die elliptische Form der Bahn nachgewiesen werden.

Eine weitere Methode könnte die Aufnahme von Lichtkurven des gesamten sichtbaren Jupitersystem sein. Die Idee dahinter wäre, dass bei Sichtbarkeit aller Monde die höchste Gesamthelligkeit gemessen wird und mit jener verglichen werden kann, wenn weniger

Monde zu sehen sind. Sollte das gelingen, liese sich sogar eine Verbindung zur aktuellen Forschung und Entdeckung von Exoplaneten herstellen.

7.2 Verwendung in der Schule

Mit meiner Arbeit habe ich gezeigt, dass der Nachweis des dritten Kepler'schen Gesetzes keine abstrakte Notwendigkeit im Klassenzimmer ist. Es kann schülerauglich reale Astrophysik, an einem fantastischen Naturphänomen, erlebbar gemacht werden.

Gemäß des Lehrplans für bayerische Gymnasien (Räde, 2024) können Schüler ab der elften Klasse Kreisbewegungen berechnen und trigonometrische Funktionen modellieren. Grundlagen der Optik und optischer Abbildungen sind seit der achten Klassenstufe bekannt. Die Gesetze der Planetenbewegung sind in Klassenstufe elf Teil des Physikunterrichtes, und daher kann mein Projekt problemlos in den Schulalltag integriert werden.

7.3 Ein Praktikumsversuch im Studium

Die Dr. Karl Remeis-Sternwarte Bamberg, das Astronomische Institut der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, wo ich diese Arbeit geschrieben habe, führt regelmäßig ein astronomisches Praktikum durch. Das ist ein Praktikum für Physikstudierende oder ein Wahlkurs für Astronomieinteressierte im Nebenfach. Dieses Praktikum deckt ein breites Spektrum an astrophysikalischen Grundlagen ab, welche ich auch teilweise hier verwendet habe (Remeis-Sternwarte, 2023). Ein Versuch zur Himmelsmechanik, der sich an meinem Projekt orientiert, kann eine gute Ergänzung sein.

Alternativ kann solch ein Projekt auch im Rahmen des Projektpraktikums von Physikstudierenden durchgeführt werden. Gemäß der Prüfungsordnung des Department Physik (31.06.2023) handelt es sich dabei um das Modul *Physikalisches Experimentieren B*, dabei können Studierende des Bachelor- und Lehramtsstudiengangs Physik ein selbstgewähltes physikalisches Projekt umsetzen.

Dieser Versuch muss sich dann nicht auf Amateurausrüstung und schülergerechte Physik beschränken. So kann hier zum Beispiel explizit der physikalische Sinn und Zweck der Verwendung der Korrekturgrößen systematisch erörtert werden. Das kann, in Anlehnung an die sieben Bahnelemente, wie bei mir in den Kapiteln 2, 4 und 5 aussehen.

Anhang A

Tabellen

Tabelle A.1: Übersicht, der in dieser Arbeit verwendeten Daten über die vier Galilei'schen Monde. Davon ist der erste Teil dem *Jovian Satellite Fact Sheet* von Williams (2023) entnommen und der zweite Teil in dieser Arbeit berechnet.

Größe	Io	Europa	Ganymed	Kallisto	Einheit
Masse m	893,2	480,0	1 481,9	1 075,9	10^{20} kg
große Halbachse a	421,8	671,1	1 070,4	1 882,7	10^3 km
Exzentrizität ε	0,004	0,009	0,001	0,007	1
Periode T	1,769138	3,551181	7,154553	16,689017	d
Inklination i	0,04	0,47	0,18	0,19	°
Perijovum $d1$	420,11	665,06	1 069,33	1 869,52	10^3 km
Apojobum $d2$	423,49	677,14	1 071,47	1 895,88	10^3 km
Periode T	42,459312	85,228344	171,709272	400,536408	h
ideale Kreisbahn r	421,67	670,99	1070,34	1 882,58	10^3 km

Tabelle A.2: Verwendete Messgrößen und Naturkonstanten

Symbol	Wert	Bezeichnung	Quelle
d_{EJ}	$588,5 \cdot 10^6 \text{ km}$	minimaler Abstand Erde-Jupiter	Williams (2024b)
G	$6,67430(15) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$	Gravitationskonstante	Mohr (2019)
m_J	$1\,898,13 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Jupitermasse	Williams (2024b)
m_J	$317,83 m_E$	Jupitermasse in Erdmassen	Williams (2024b)
c_0	$299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	Mohr (2019)
AU	$149\,597\,870 \text{ km}$	Astronomische Einheit	Standish (2004)
m_\odot	$1\,988\,500 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Sonnenmasse	Williams (2022)
m_S	$568,32 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Saturnmasse	Williams (2024c)
d_{1J}	$740,595 \cdot 10^6 \text{ km}$	Perihel, Jupiter	Williams (2024b)
d_{2J}	$816,363 \cdot 10^6 \text{ km}$	Aphel, Jupiter	Williams (2024b)
d_{1S}	$1\,357,554 \cdot 10^6 \text{ km}$	Perihel, Saturn	Williams (2024c)

Tabelle A.3: Übersicht aller Aufnahmen und Ergebnis der Zuordnung der Monde. Die \emptyset -Symbole kennzeichnen, dass Monde hinter Jupiter verdeckt oder vor ihm überstrahlt werden. Bei Bild 2317 ist Kallisto von einem Baum verdeckt.

Bildnummer	Datum	Uhrzeit	Zeit t [h]	Zuordnung der Monde				
IMG_2173	20.01.	18:20	$0,\bar{3}$	Europa	Ganymed	Jupiter	Kallisto	Io
IMG_2194	20.01.	19:51	1,85	Europa	Ganymed	Jupiter	Kallisto	Io
IMG_2211	20.01.	22:15	4,25	Europa	Ganymed	Jupiter	Io	Kallisto
IMG_2215	20.01.	23:58	$5,\bar{96}$	Ganymed	Europa	Jupiter	Io	Kallisto
IMG_2228	21.01.	17:20	$23,\bar{3}$	Io	Jupiter	Ganymed	Europa	Kallisto
IMG_2240	21.01.	20:20	$26,\bar{3}$	Io	Jupiter	Ganymed	Europa	Kallisto
IMG_2263	22.01.	22:35	$52,\bar{583}$	\emptyset	\emptyset	Jupiter	Ganymed	Kallisto
IMG_2277	23.01.	18:18	$72,\bar{3}$	Europa	Io	Jupiter	Ganymed	Kallisto
IMG_2287	24.01.	17:20	$95,\bar{3}$	\emptyset	\emptyset	Jupiter	Ganymed	Kallisto
IMG_2304	24.01.	19:40	$97,\bar{6}$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	Jupiter	Kallisto
IMG_2314	24.01.	21:03	99,05	Io	\emptyset	Jupiter	Europa	Kallisto
IMG_2317	24.01.	23:51	101,85	Io	Ganymed	Jupiter	Europa	(Kallisto)
IMG_2324	25.01.	17:27	119,45	Ganymed	Jupiter	Io	Europa	Kallisto
IMG_2333	26.01.	17:35	$143,\bar{583}$	Ganymed	Io	Europa	Jupiter	Kallisto
IMG_2343	26.01.	21:02	$147,\bar{03}$	Ganymed	Io	Europa	Jupiter	Kallisto
IMG_2371	26.01.	23:26	$149,\bar{43}$	Ganymed	Europa	Io	Jupiter	Kallisto
IMG_2374	27.01.	17:15	$167,\bar{25}$	Ganymed	Europa	Jupiter	Io	Kallisto
IMG_2409	27.01.	20:46	$170,\bar{76}$	Ganymed	Europa	Jupiter	Io	Kallisto
IMG_2417	27.01.	23:38	$173,\bar{63}$	Ganymed	Europa	Jupiter	Io	Kallisto
IMG_2443	28.01.	17:31	$191,\bar{516}$	Io	Kallisto	Jupiter	Ganymed	Europa
IMG_2448	28.01.	20:19	$194,\bar{316}$	Io	Kallisto	Jupiter	Ganymed	Europa
IMG_2462	28.01.	22:32	$196,\bar{53}$	Io	Kallisto	Jupiter	Ganymed	Europa
IMG_2479	29.01.	17:31	$215,\bar{516}$	Kallisto	Jupiter	Io	Europa	Ganymed
IMG_2500	29.01.	20:30	218,5	Kallisto	Jupiter	Io	Europa	Ganymed
IMG_2506	30.01.	17:39	239,65	Kallisto	Europa	Io	Jupiter	Ganymed

Tabelle A.4: Positionen von den ersten drei Monden (v.l.n.r.) auf den Fotos mit Unsicherheiten.

Bildnr.	Mond 1				Mond 2				Mond 3			
	x [px]	y [px]	δx	δy	x [px]	y [px]	δx	δy	x [px]	y [px]	δx	δy
2173	179,9	242,3	1,0	1,2	181,9	247,3	1,2	1,5	318,5	307,4	0,9	1,0
2194	203,9	213,9	1,0	1,1	203,9	218,9	1,0	1,1	305,4	325,4	0,8	0,8
2211	234,1	213,4	0,8	1,0	231,6	216,1	0,9	1,4	303,6	326,1	0,8	1,2
2215	218,2	259,1	1,2	1,4	220,2	257,1	0,6	0,7	319,7	287,35	0,8	0,27
2228	156,0	216,2	1,3	1,4	297,4	284,8	1,1	1,2	321,6	287,8	1,1	1,1
2240	175,3	195,2	1,4	1,5	298,9	295,7	1,5	1,7	318,3	300,8	1,3	1,3
2263	327,1	307,1	1,2	1,5	407,3	358,8	1,6	1,7	148	207	10	10
2277	33,8	252,8	1,4	1,4	134,8	264,8	1,4	1,2	329,6	268,4	1,7	1,5
2287	129,4	222,0	1,9	2,0	456,3	302,1	1,2	1,2	104	227	10	9
2304	430,0	355,8	1,5	1,6	118	178	10	10	118	178	10	10
2314	119,7	138,0	1,7	1,9	160,4	186,6	1,4	1,6	422,1	397	1,3	1,3
2317	217,0	230,6	1,1	1,1	256,0	246,8	1,6	1,3	306,0	302,8	1,6	1,7
2324	62,9	157,7	1,2	1,2	212,0	244,0	0,1	1,3	303,0	281,8	0,9	1,0
2333	77,3	200,2	1,5	1,4	215,6	247,0	1,4	1,3	235,8	250,3	1,3	0,3
2343	90,9	175,2	2,2	2,3	200,6	230,4	2,0	2,1	212,0	231,0	1,8	2,3
2371	85	200	4	4	193	238	7	10	193	238	7	10
2374	150,2	240,2	1,2	1,5	160,2	238,7	1,1	1,3	339,3	293,4	1,1	1,4
2409	175,7	233,2	1,7	1,6	182,6	232,4	1,5	1,3	341,4	305,0	1,4	1,4
2417	191,6	251,0	1,6	0,1	199,00	249,7	0,12	1,3	335,5	290,1	1,3	1,3
2443	193,2	244,8	1,8	1,6	269,6	251,5	1,8	1,2	313,6	293,9	1,9	1,7
2448	207,3	233,1	1,3	1,4	260,94	244,1	0,07	1,0	322,7	314,5	1,4	1,5
2462	221,0	240,6	1,2	1,2	250,7	236,6	1,0	1,0	335,0	323,5	1,3	1,5
2479	145,4	212,2	1,1	1,3	338,1	292,3	1,4	1,7	346,1	290,6	1,5	1,5
2500	163,5	161,5	1,5	1,6	309,9	299,8	1,5	1,6	316,4	300,5	1,6	1,5
2506	28,3	213,5	1,3	1,2	159,9	246,0	1,7	1,5	212,0	262,6	1,5	1,6

Tabelle A.5: Fortsetzung von Tabelle A.4. Positionen von Jupiter und Mond 4 auf den Fotos mit Messunsicherheiten.

Bildnr.	Jupiter				Mond 4			
	x [px]	y [px]	δx	δy	x [px]	y [px]	δx	δy
2173	271,8	271,0	0,6	0,6	348,2	299,6	1,2	1,3
2194	270,2	268,0	0,6	0,6	328,0	321,5	1,1	0,8
2211	270,9	268,9	0,6	0,6	292,0	346,0	0,9	1,1
2215	270,6	269,0	0,6	0,6	345,2	317,8	1,2	1,2
2228	229,3	245,3	0,6	0,6	389,8	327,8	1,0	1,0
2240	226,1	229,2	0,6	0,6	373,4	356,9	1,0	1,2
2263	148,1	207,3	0,6	0,6	148	207	10	10
2277	160,1	262,6	0,6	0,6	510,0	290,6	1,6	1,4
2287	103,7	227,3	0,6	0,6	104	227	10	9
2304	118,0	178,0	0,6	0,6	118	178	10	10
2314	147,7	166,9	0,6	0,6	148	167	9	9
2317	270,4	269,8	0,6	0,6	–	–	–	–
2324	187,5	227,6	0,6	0,6	482,4	362,2	0,8	1,1
2333	270,4	270,3	0,6	0,6	502,4	340,8	1,0	1,0
2343	271,4	268,5	0,6	0,6	477,7	361,5	2,7	2,7
2371	270,7	270,0	0,6	0,6	475,9	335	2,4	4
2374	269,8	269,7	0,6	0,6	396,5	293,2	0,8	1,1
2409	269,9	270,0	0,6	0,6	375,0	304,0	1,2	1,1
2417	270,5	269,5	0,6	0,6	363,9	284,6	0,8	0,6
2443	270,2	268,6	0,6	0,6	348	298,8	1,7	1,6
2448	269,9	269,7	0,6	0,6	353,7	326,0	1,2	1,3
2462	270,2	269,2	0,6	0,6	362,8	332,8	1,1	1,1
2479	270,0	271,0	0,6	0,6	440,9	335,0	1,2	1,2
2500	270,3	270,6	0,6	0,6	413,5	396,7	1,5	1,7
2506	271,1	268,6	0,6	0,6	451,8	296,7	1,5	1,5

Tabelle A.6: Abstände der Monde zu Jupiter auf den Fotos mit Messunsicherheiten, nach erfolgter Zuordnung.

Bildnr.	Io		Europa		Ganymed		Kallisto	
	a [px]	δa						
2173	81,6	0,9	-96,3	0,6	-93,0	0,9	59,2	0,5
2194	78,8	0,6	-85,6	0,7	-82,5	0,7	67,3	0,3
2211	65,9	0,7	-66,6	0,5	-65,8	0,9	79,9	0,6
2215	52,42	0,08	-51,786	0,023	-53,3	0,8	89,1	0,9
2228	-78,9	1,0	101,6	0,7	78,7	0,8	180,5	0,6
2240	-61,1	1,2	116,7	1,0	98,6	1,5	195,0	0,7
2263	0	10	0	10	204,9	1,0	300,2	1,5
2277	-25,4	0,8	-126,7	0,9	169,6	1,2	351,0	1,1
2287	0	10	0	10	26,2	1,0	360,4	0,8
2304	0	10	0	10	0	10	359,1	1,3
2314	-40,2	1,7	23,4	1,3	0	9	358,1	1,0
2317	-66,2	0,7	48,5	1,5	-27,1	1,2	–	–
2324	29,482	0,027	127,6	0,5	-142,9	0,9	324,2	0,4
2333	-59,5	1,1	-40,0	0,5	-205,4	1,2	242,5	0,5
2343	-80,4	2,0	-70,2	2,0	-203,2	2,3	226,3	2,8
2371	-84	9	-84	9	-198	5	215,2	2,8
2374	73,4	0,8	-113,9	0,7	-123,2	0,8	128,86	0,29
2409	79,6	1,1	-95,1	1,2	-101,1	1,4	110,5	0,8
2417	68,2	0,9	-74,19	0,28	-81,0	0,9	94,61	0,20
2443	-80,6	1,5	83,5	1,4	50,2	1,7	-17,1	0,7
2448	-72,5	1,1	101,0	0,9	69,2	1,2	-27,12	0,21
2462	-56,9	0,9	112,3	0,7	84,5	1,2	-38,0	0,6
2479	71,4	1,1	78,6	1,1	182,5	0,8	-137,8	0,8
2500	49,2	1,4	54,9	1,4	190,8	1,5	-152,7	1,4
2506	-59,4	1,0	-113,5	1,3	182,9	1,1	-249,0	0,9

Tabelle A.7: Jupiters Abstand, Phasenwinkel und äquatoriale Koordinaten (Solar System Dynamics, 13.03.2024), Teil 1. Die Zeit bezieht sich auf meinen Beobachtungszeitraum, vom 20.01.2024 18:00 Uhr ($t = 0$ h) bis 30.01.2024 18:00 Uhr ($t = 240$ h).

t [h]	D_{EJ} [km]	$\angle \text{STO}$ [°]	RA [°]	DE [°]	$\sin i$	$\approx i$ [°]
0	716073580,9	11,3064	34,02993	12,48542	-0,051831328	-2,97
3	716374646,7	11,3093	34,03791	12,48884	-0,051822848	-2,97
6	716677253,7	11,3119	34,0461	12,49224	-0,051815934	-2,97
9	716979658,7	11,3144	34,05453	12,49567	-0,051809949	-2,97
12	717280272,7	11,3166	34,06313	12,49915	-0,05180415	-2,97
15	717578596	11,3188	34,07175	12,50268	-0,051797645	-2,97
18	717875510,9	11,321	34,08027	12,50626	-0,051789723	-2,97
21	718172762	11,3233	34,08864	12,50984	-0,051780904	-2,97
24	718471927,4	11,3258	34,09693	12,51341	-0,051771766	-2,97
27	718773489	11,3282	34,1053	12,51695	-0,051763587	-2,97
30	719076547,4	11,3305	34,11387	12,52048	-0,05175675	-2,97
33	719379350,5	11,3325	34,12268	12,52403	-0,051751003	-2,97
36	719680323,7	11,3344	34,13166	12,52763	-0,051745439	-2,97
39	719978996,6	11,3362	34,14066	12,53129	-0,051739006	-2,97
42	720276279,4	11,338	34,14955	12,53498	-0,051731423	-2,97
45	720573927,1	11,34	34,15829	12,53869	-0,051722616	-2,96
48	720873506,7	11,3421	34,16696	12,54238	-0,051713714	-2,96
51	721175474,9	11,3441	34,1757	12,54604	-0,051705709	-2,96
54	721478909,1	11,346	34,18465	12,54969	-0,051699105	-2,96
57	721782050,4	11,3476	34,19384	12,55336	-0,051693588	-2,96
60	722083338	11,3491	34,2032	12,55708	-0,051688253	-2,96
63	722382327,1	11,3505	34,21257	12,56086	-0,051681988	-2,96
66	722679949,4	11,3519	34,22183	12,56468	-0,051674409	-2,96
69	722977963,4	11,3535	34,23094	12,5685	-0,051665934	-2,96
72	723277917,9	11,3552	34,23998	12,57231	-0,0516572	-2,96
75	723580239,2	11,3569	34,2491	12,57609	-0,051649422	-2,96
78	723883979,4	11,3584	34,25843	12,57986	-0,051643042	-2,96
81	724187373,4	11,3596	34,26799	12,58365	-0,051637688	-2,96
84	724488877,7	11,3607	34,27772	12,58749	-0,051632514	-2,96
87	724788078,3	11,3617	34,28746	12,59139	-0,05162641	-2,96
90	725085934,8	11,3628	34,29709	12,59533	-0,051618991	-2,96
93	725384215	11,364	34,30657	12,59927	-0,051610677	-2,96
96	725684454,4	11,3653	34,31598	12,60319	-0,051602267	-2,96
99	725987052,2	11,3666	34,32547	12,60709	-0,051594648	-2,96
102	726291035,3	11,3677	34,33517	12,61098	-0,051588425	-2,96
105	726594630,7	11,3686	34,34511	12,61489	-0,051583285	-2,96
108	726896307,6	11,3693	34,3552	12,61885	-0,051578205	-2,96
111	727195677,1	11,3699	34,36531	12,62286	-0,051572416	-2,96
114	727493720	11,3706	34,3753	12,62692	-0,051565091	-2,96
117	727792208,3	11,3715	34,38514	12,63098	-0,05155687	-2,96

Tabelle A.8: Jupiters Abstand, Phasenwinkel und äquatoriale Koordinaten (Solar System Dynamics, 13.03.2024), Teil 2.

t [h]	D_{EJ} [km]	\angle STO [°]	RA [°]	DE [°]	$\sin i$	$\approx i$ [°]
120	728092661,1	11,3724	34,39492	12,63502	-0,051548612	-2,95
123	728395450	11,3733	34,40479	12,63903	-0,051541367	-2,95
126	728699580,2	11,3741	34,41485	12,64304	-0,051535234	-2,95
129	729003275,7	11,3746	34,42516	12,64706	-0,051530404	-2,95
132	729305024,8	11,3749	34,43562	12,65114	-0,051525469	-2,95
135	729604470	11,3751	34,44609	12,65527	-0,051519765	-2,95
138	729902617,7	11,3755	34,45644	12,65944	-0,051512688	-2,95
141	730201246,2	11,376	34,46664	12,66361	-0,051504715	-2,95
144	730501857,7	11,3765	34,47679	12,66777	-0,051496601	-2,95
147	730804793,8	11,377	34,48701	12,6719	-0,05148938	-2,95
150	731109032,8	11,3774	34,49745	12,67602	-0,05148361	-2,95
153	731412790	11,3775	34,50812	12,68016	-0,051478859	-2,95
156	731714566,5	11,3775	34,51895	12,68435	-0,051474224	-2,95
159	732014030,2	11,3774	34,52978	12,6886	-0,051468595	-2,95
162	732312209,9	11,3773	34,54049	12,69288	-0,051461758	-2,95
165	732610888,9	11,3774	34,55105	12,69717	-0,051453862	-2,95
168	732911554,9	11,3776	34,56156	12,70144	-0,051445987	-2,95
171	733214523,9	11,3778	34,57215	12,70568	-0,051439064	-2,95
174	733518754,4	11,3778	34,58295	12,70991	-0,05143353	-2,95
177	733822459,9	11,3775	34,59398	12,71417	-0,051428849	-2,95
180	734124160,8	11,3771	34,60517	12,71847	-0,051424445	-2,95
183	734423554,3	11,3767	34,61635	12,72283	-0,051418989	-2,95
186	734721692,3	11,3763	34,62741	12,72723	-0,05141216	-2,95
189	735020361,4	11,376	34,63833	12,73163	-0,051404495	-2,95
192	735321030,1	11,3758	34,6492	12,73601	-0,051396851	-2,95
195	735623983,7	11,3756	34,66015	12,74036	-0,051390157	-2,95
198	735928154,8	11,3752	34,67131	12,7447	-0,051384851	-2,95
201	736231750,6	11,3746	34,68271	12,74907	-0,051380453	-2,95
204	736533307,2	11,3738	34,69425	12,75349	-0,051376049	-2,94
207	736832550,4	11,373	34,70578	12,75796	-0,051370755	-2,94
210	737130556,7	11,3723	34,7172	12,76247	-0,051364148	-2,94
213	737429119,5	11,3717	34,72847	12,76698	-0,051356646	-2,94
216	737729694	11,3711	34,73969	12,77146	-0,051349329	-2,94
219	738032540,3	11,3705	34,75099	12,77592	-0,051342796	-2,94
222	738336571,3	11,3698	34,76251	12,78038	-0,051337544	-2,94
225	738639991,5	11,3688	34,77426	12,78486	-0,051333303	-2,94
228	738941354	11,3677	34,78615	12,78938	-0,051329217	-2,94
231	739240410,9	11,3665	34,79803	12,79396	-0,051324077	-2,94
234	739538258,3	11,3654	34,8098	12,79858	-0,051317623	-2,94
237	739836690	11,3644	34,82142	12,8032	-0,051310275	-2,94
240	740137140,3	11,3635	34,83299	12,80779	-0,051303111	-2,94

Anhang B

Ergänzungen und Nebenrechnungen

B.1 Astronomie mit dem Fernglas

In diesem Abschnitt möchte ich den von mir geprägten Begriff „handelsübliches Fernglas“ etwas konkretisieren. Bei der Verwendung von Ferngläsern für astronomischen Beobachtungen müssen ein paar Dinge berücksichtigt werden, denn nicht jedes Fernglas ist auch für die astronomische Beobachtung geeignet.

Bei meiner Erklärung beziehe ich mich auf Spix (2009). Anhand der Angaben Vergrößerung, Öffnung und Sehfeld, die in der Regel auf einem Fernglas gefunden werden können, kann abgeleitet werden, ob es für die Beobachtung von Objekten am Himmel geeignet ist. Solche Objekte erscheinen aufgrund ihrer Entfernung sehr klein, daher konzentrieren sich astronomische Beobachtung oft nur auf einen entsprechend kleinen Ausschnitt des Himmels. Das Sehfeld spielt bei der Auswahl eines geeigneten Fernglas daher nur eine untergeordnete Rolle, im Gegensatz zu den beiden anderen Größen. Die Vergrößerung lässt die beobachteten Objekte entsprechend größer erscheinen und im Zusammenhang mit der Öffnung wird die Lichtstärke ermittelt. Der Quotient aus Öffnung in mm mit der Vergrößerung ergibt die sogenannte Austrittspupille und die wiederum zum Quadrat ergibt die geometrische Lichtstärke. Je größer dieser Wert, umso besser kann bei Dämmerung oder ein lichtschwaches Objekt beobachtet werden. Das erreiche ich, indem ich eine größere Öffnung wähle. Bei astronomischen Beobachtungen sollte die Wahl eines Fernglases auf eines mit großem Verhältnis von Öffnung zu Vergrößerung fallen. Das beginnt bei einer Öffnung von 40 mm bis 60 mm und reicht bis zu jenseits von 70 mm. Letztere werden dann nur noch für diesen Zweck verwendet. Als Standardferngläser werden ein 8×42 -Dachkantenprisma- oder ein 10×50 -Porroprisma-Fernglas vorgeschlagen.

B.2 Äußere Gravitationseinflüsse auf das Jupitersystem

Um eine konservative Schätzung der Größenordnung der gravitativen Einflüsse vorzunehmen, schaue ich mir die kleinstmögliche Gravitationskraft (Demtröder, 2021) zwischen Jupiter und seinen Monden an und vergleiche sie mit der größtmöglichen von Sonne und Saturn. Als Buchstabenkürzel verwende ich die jeweiligen Anfangsbuchstaben der Monde

{I,E,G,K} oder $\{x,y\}$ für jeweils zwei beliebige Objekte. Für die Planeten Jupiter und Saturn gelten ebenfalls die Anfangsbuchstaben J und S und die Sonne bekommt das Symbol O. Zur Berechnung verwende ich die Daten, die ich in Tabelle A.1 zusammengestellt habe, sowie Jupiters Masse m_J aus Tabelle A.2.

Die schwächste gravitative Bindung eines jeden Jupitermondes bestimme ich mit dem jeweils größtmöglichen Abstand zum Jupiter, dem Apojovum $d_2 = a(1 + \varepsilon)$. Ich vergleiche die Ergebnisse der Monde untereinander.

$$F_{xJ} = G \frac{m_x m_J}{d_{2x}^2}$$

$$\frac{F_{xJ}}{F_{yJ}} = G \frac{m_x m_J}{d_{2x}^2} : G \frac{m_y m_J}{d_{2y}^2} = \frac{m_x d_{2y}^2}{m_y d_{2x}^2} \quad (\text{B.1})$$

Als Beispiel führe ich das Verhältnis zwischen Io und Kallisto auf, die anderen berechnen sich analog und es ergibt sich:

$$\frac{F_{IJ}}{F_{KJ}} = \frac{m_I d_{2K}^2}{m_K d_{2I}^2} = \frac{893,2 \cdot 10^{20} (1882,7(1 + 0,007))^2 \text{ kg } 10^6 \text{ km}^2}{1075,9 \cdot 10^{20} (421,8(1 + 0,004))^2 \text{ kg } 10^6 \text{ km}^2} \approx 16,6$$

$$F_{IJ} = 4,8 F_{EJ} = 3,9 F_{GJ} = 16,6 F_{KJ}$$

$$\Rightarrow F_{IJ} > F_{GJ} > F_{EJ} > F_{KJ}$$

Die Gravitationskraft zwischen Jupiter und Kallisto ist am kleinsten, daher vergleiche ich sie mit der von Sonne und Saturn.

Für den Vergleich berechne ich direkt die Werte der drei Summanden aus Gleichung (2.5). Ausgangspunkt ist die Gravitationswirkung zwischen Kallisto und Jupiter und für den Vergleich mit der Sonne verwende ich den Perihel vom Jupiter d_{1J} . Für den Vergleich mit dem Saturn bilde ich den hypothetisch kleinsten Abstand aus Aphel vom Jupiter und Perihel vom Saturn $d_{JS} = d_{1S} - d_{2J}$. Ich benötige nicht nur die Wirkungen von Jupiter mit Sonne und Saturn, sondern auch die von Kallisto mit Sonne und Saturn und dafür verwende als kürzeste Abstände $d_{KO} = d_{1J} - a_K(1 + \varepsilon_K)$ und $d_{KS} = d_{JS} - a_K(1 + \varepsilon_K)$.

$$\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) F_{12} = \left(\frac{1}{m_K} + \frac{1}{m_J} \right) F_{KJ} = \frac{m_K + m_J}{m_K m_J} G \frac{m_K m_J}{d_{2K}^2} = G \frac{m_K + m_J}{d_{2K}^2}$$

$$\frac{1}{m_x} F_x^{\text{ext}} = G \frac{m_y}{d_{xy}^2} \quad (\text{B.3})$$

$$\left(\frac{1}{m_K} + \frac{1}{m_J} \right) F_{KJ} : \frac{1}{m_x} F_x^{\text{ext}} = G \frac{m_K + m_J}{d_{2K}^2} : G \frac{m_y}{d_{xy}^2} = \frac{m_K + m_J}{m_y} \left(\frac{d_{xy}}{d_{2K}} \right)^2$$

Im Klartext setze ich damit die gravitative Wirkung zwischen Kallisto und Jupiter ins Verhältnis mit der von Sonne auf Jupiter, von Saturn auf Jupiter, von Sonne auf Kallisto und von Saturn auf Kallisto. Zur Berechnung verwende ich außerdem die Sonnenmasse, die Saturnmasse, Perihel von Jupiter und Saturn und Aphel von Jupiter aus Tabelle A.2. Als Beispiel führe ich den Vergleich mit der Wirkung von Saturn auf Kallisto aus und

die anderen berechnen sich analog.

$$\begin{aligned}
 \frac{m_K + m_J}{m_S} \left(\frac{d_{KS}}{d_{2K}} \right)^2 &= \frac{(m_K + m_J) [\text{kg}]}{m_S [\text{kg}]} \left(\frac{(d_{JS} - a_K(1 + \varepsilon_K)) [\text{km}]}{(a_K(1 + \varepsilon_K)) [\text{km}]} \right)^2 \\
 &= \frac{(1075,9 + 1898,13 \cdot 10^4)}{568,32 \cdot 10^4} \\
 &\quad \left(\frac{((1357,554 - 816,363) \cdot 10^3 - 1882,7(1 + 0,007))}{1882,7(1 + 0,007)} \right)^2 \\
 &\approx 270\,264,8 \tag{B.4} \\
 \frac{m_K + m_J}{m_O} \left(\frac{d_{KO}}{d_{2K}} \right)^2 &\approx 144,9 \\
 \frac{m_K + m_J}{m_S} \left(\frac{d_{JS}}{d_{2K}} \right)^2 &\approx 272\,168,3 \\
 \frac{m_K + m_J}{m_O} \left(\frac{d_{1J}}{d_{2K}} \right)^2 &\approx 145,7
 \end{aligned}$$

Ich stelle fest, dass die Wirkung zwischen Jupiter und Kallisto etwa 145 mal stärker ist, als jene zwischen Sonne und Jupiter und zwischen Sonne und Kallisto. Damit ist die Wirkung der Sonne auf beide Himmelskörper auch annähernd gleich. Weiterhin ist die Wirkung zwischen Jupiter und Kallisto etwa 270 000 mal stärker, als die beiden zwischen Saturn und Jupiter und zwischen Saturn und Kallisto. Damit sind auch diese beiden Wirkungen ungefähr gleich.

B.3 Python Code zur Positionsbestimmung

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import scipy.optimize as opt
4 import math
5 import sys
6 import os
7
8 def select_coords(image_path):
9     img = plt.imread(image_path)
10    fig,ax = plt.subplots()
11    ax.imshow(img)
12    p0 = []
13
14    amount = input(f"How much Moons have you seen (0...4)?")
15    if amount in ['0', '1', '2', '3', '4']:
16        number = int(amount)
17        objects = number+1
18    else:
19        os.execv(sys.executable, ['python'] + sys.argv)
20
21    def onclick(event):
22        if event.button == 2:

```

```

23     p1 = [int(event.xdata),int(event.ydata),
24           img[int(event.ydata),int(event.xdata)]]
25     print(p1)
26     classification = input(f"Classify point as 'm' (moon),
27                           'j' (jupiter), or 'c' (correction): ")
28     if classification in ['m', 'j', 'c']:
29         if classification == 'm':
30             p1.append(2.)
31             p1.append(2.)
32             p0.append(p1)
33             print(p0)
34         elif classification == 'j':
35             p1.append(10.)
36             p1.append(10.)
37             p0.append(p1)
38             print(p0)
39         elif classification == 'c':
40             p1 = None
41             print(p0)
42             print(f"Please click again.")
43     else:
44         print(f"Invalid input. Please enter 'm', 'j' or
45               'c' and click again!")
46     if len(p0) == objects:
47         plt.close()
48
49     cid = fig.canvas.mpl_connect('button_press_event', onclick)
50     plt.show()
51     return p0
52
53 def gauss2d(xy,*params):
54     x = xy[0]
55     y = xy[1]
56     x0 = params[0]
57     y0 = params[1]
58     amp = params[2]
59     xsigma = params[3]
60     ysigma = params[4]
61     z = amp*np.exp(-0.5*(((x-x0)/xsigma)**2+((y-y0)/ysigma)**2))/
62         (2.*math.pi*xsigma*ysigma)
63     return z
64
65 def fit_moons(image_path,p0):
66     img = plt.imread(image_path)
67     x = np.arange(0,img.shape[1],1)
68     y = np.arange(0,img.shape[0],1)
69     X,Y = np.meshgrid(x,y)
70     xdata = np.vstack((X.ravel(),Y.ravel()))
71     ydata = img.ravel()
72     fits = []
73
74     for i in range(len(p0)):
75         popt,pcov = opt.curve_fit(gauss2d,xdata,ydata,p0[i],
76                                 absolute_sigma=True)
77         print(f"-----")
78         print(f"popt = ",popt)

```

```

79     print(f"pcov = ",pcov)
80
81     if p0[i][3] == 2:
82         f1 = [popt[0],popt[1],popt[3],popt[4]]
83     elif p0[i][3] == 10:
84         f1 = [popt[0],popt[1],np.sqrt(pcov[0][0]),
85              np.sqrt(pcov[1][1])]
86
87     print(f"initial guess: ",p0[i])
88     print(f"fit result: ",f1)
89     fits.append(f1)
90
91     return fits
92
93 image_path = '../Fotos_2024_01/edited/pp_IMG_2333_ed2.png'
94
95 img = plt.imread(image_path)
96 fig,ax = plt.subplots()
97 ax.imshow(img)
98 plt.show()
99
100 coords = select_coords(image_path)
101
102 fits = fit_moons(image_path,coords)
103
104 print(f"-----")
105 print(fits)
106 print(f"-----")

```

Zu Beginn des Programmablaufs wird nach der Anzahl der sichtbaren Monde gefragt, um die Länge der Liste mit den Startparametern festzulegen. Weiterhin habe ich bei den Tastatureingaben einige Absicherungen, im Falle von Falscheingaben, eingebaut. Einige der `print`-Befehle dienen nur zur Kontrolle, sie tragen nicht zur Funktion des Programms bei. Beim Click-Event habe ich mich für die Verwendung der mittleren Maustaste entschieden, da in der Benutzeroberfläche die linke Maustaste mit Funktionen davon, z.B. Zoom, belegt ist.

Zum Nenner $2\pi\sigma_x\sigma_y$ der Funktion $z(x,y)$ möchte ich anmerken, dass hier bei einer mehrdimensionalen Normalverteilung die Wurzel aus 2π mit der Dimension im Exponenten und der Determinante der Kovarianzmatrix steht (Bronstein, 1999). Es handelt sich um ein zweidimensionales Problem und da es sich um unabhängige Koordinaten handelt, sind die Kovarianzen und damit die Einträge der Nebendiagonale dieser Matrix Null. Die Determinante ist damit $(\sigma_x\sigma_y)^2$ und die Exponenten neutralisieren sich mit der Wurzel.

Probleme und Optimierung

Da das Programm sehr elementar ist, gab es einige Schwierigkeiten und deswegen ist es auch nicht vollständig automatisiert. Einige Fälle verursachen Probleme und erfordern manuelles Eingreifen, andere wiederum funktionierten besser als gedacht. Während des Programmablaufs lasse ich viele Zwischenschritte ausgeben, das ist genau für das Auftreten kritischer Fälle gedacht.

Bei der Abfrage nach der Anzahl der sichtbaren Monde habe ich den Fall von Bild C.12, bei dem sich Kallisto hinter einem Baum befindet, abgedeckt. Allerdings habe ich

nicht berücksichtigt, dass ein unwissender Nutzer vergessen könnte, dass Jupiter die Sicht auf Monde verhindern kann und man trotzdem Koordinaten für diese Monde braucht. Das ließe sich entweder durch eine Änderung der Eingabeaufforderung verbessern oder diese mögliche Mondposition wird weggelassen.

Befindet sich ein Mond zu nah beieinander oder an Jupiter, kommt es vor, dass das Programm die Normalverteilung an das falsche Objekt anpasst. Hier muss manuell eingegriffen und der Vorgang wiederholt werden, um zum Beispiel durch einen Klick am Rand des gewünschten Objekts, andere Startwerte an den Fit zu übergeben. Es stellte sich als das am häufigsten auftretende Problem heraus, selbst der relativ große Ganymed, auf Foto C.9, war schwierig. Bei der Auswertung des Bildes C.20 musste ich sehr stark eingreifen und den Jupiter aus der Grafik löschen, damit der unmittelbar nebenan liegende Mond überhaupt erkannt wurde. Dieser Eingriff bietet jedoch gleich eine mögliche Lösung des Problems. Wird Jupiter beispielsweise immer zuerst angeklickt, kann genau diese Region dann vom Fit der Monde ausgeschlossen werden.

Die lichtschwachen Monde in Aufnahme C.12 funktionierten nach der Kontrastverstärkung überraschend gut. Auf Foto C.16 sind allerdings die Monde nicht im Fokus und dadurch überlappen sich zwei von ihnen. Das kann der Fit der Normalverteilung so nicht auseinanderhalten. Tatsächlich liegt hier aber auch ein Beobachtungsfehler vor, auf dessen Vermeidung ich im laufenden Text hingewiesen habe.

B.4 Ergänzungsgrafiken zur Zuordnung der Monde

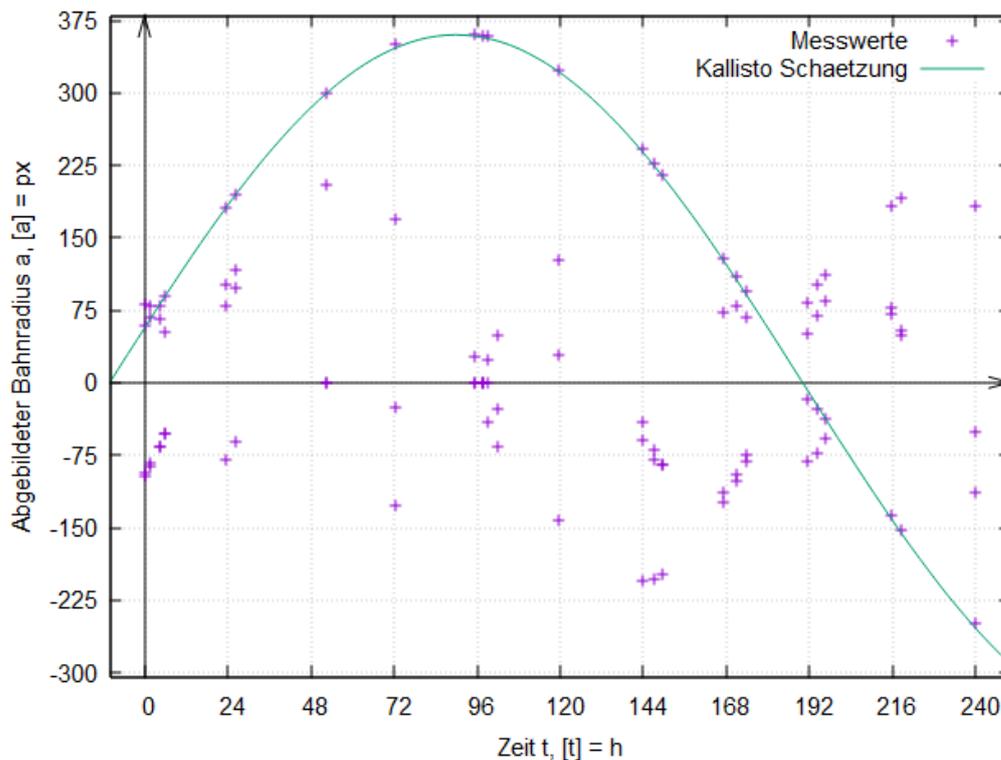


Abbildung B.1: Erster Schritt: Zuordnung von Kallisto anhand des größten Orbits.

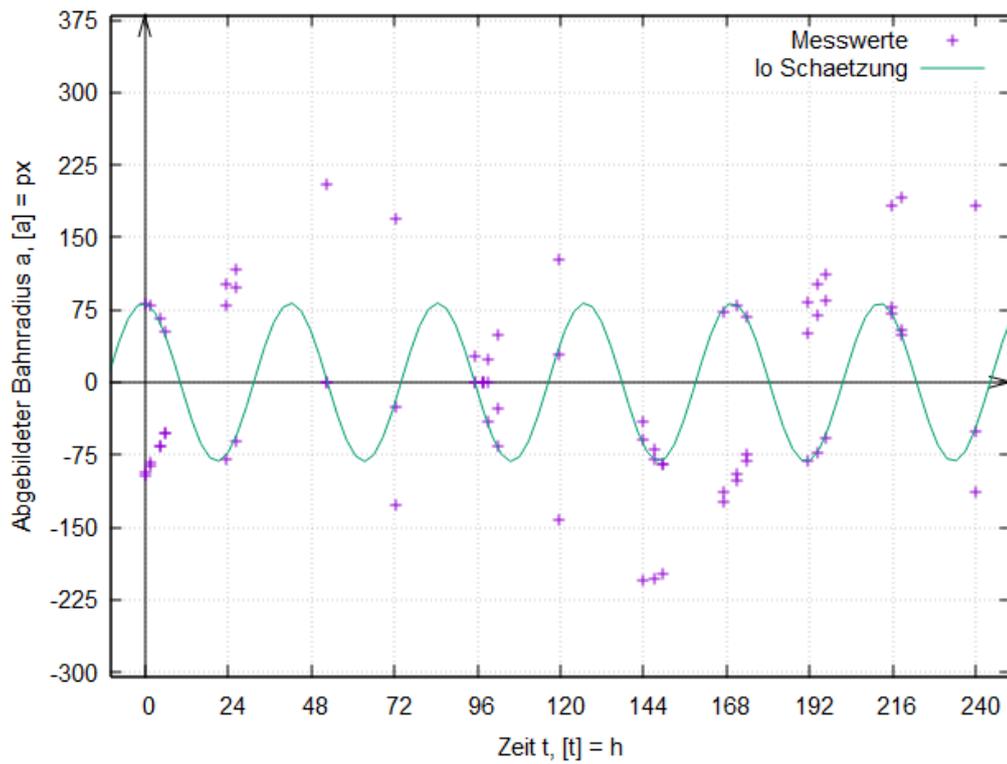


Abbildung B.2: Zweiter Schritt: Identifizieren von Io durch kleinsten Orbit.

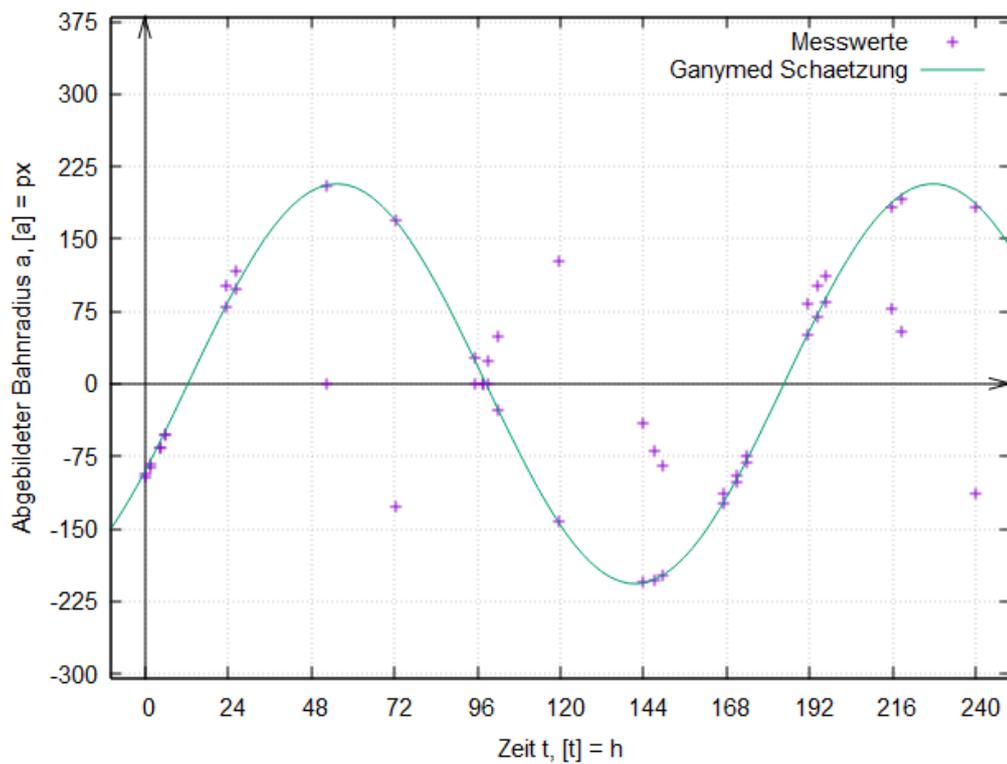


Abbildung B.3: Dritter Schritt: Entweder-oder-Fallunterscheidung von Ganymed und Europa.

B.5 Der Schwinkel zwischen Mizar A und Alkor

Hier führe ich die ausführliche Rechnung zu Abschnitt 5.3.3 auf. Zunächst rechne ich die Koordinaten im Äquatorialsystem in Grad um, es gilt

$$\begin{aligned} \text{RA} &= 13 \text{ h } 23' 55,54'' \quad \text{DE} = 54^\circ 55' 31,30'' \\ \varphi_1 &= 15 \frac{^\circ}{\text{h}} \cdot \left(13 \text{ h} + \frac{23' \text{ h}}{60'} + \frac{55,54'' \text{ h}}{3600''} \right) \quad \vartheta_1 = 54^\circ + \frac{55' \circ}{60'} + \frac{31,30'' \circ}{3600''} \\ \varphi_1 &= 200,9814^\circ \quad \hat{\vartheta}_1 = 54,9254^\circ, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

für Mizar A (Wenger et al., 2020) und analog

$$\begin{aligned} \text{RA} &= 13 \text{ h } 23' 55,54'' \quad \text{DE} = 54^\circ 55' 31,30'' \\ \varphi_2 &= 201,3064^\circ \quad \hat{\vartheta}_2 = 54,9880^\circ, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

für Alkor (Wenger et al., 2007). Den Winkelabstand berechne ich mit dem Skalarprodukt der beiden Einheitsortsvektoren in Kugelkoordinaten und den Deklinationswinkel wandle ich in den Polarwinkel $\vartheta_j = 90^\circ - \hat{\vartheta}_j$ um. Ich berechne

$$\begin{aligned} \sigma &= \arccos(\vec{e}_1 \vec{e}_2) \\ &= \arccos \left(\begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \sin \vartheta_1 \\ \sin \varphi_1 \sin \vartheta_1 \\ \cos \vartheta_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 \sin \vartheta_2 \\ \sin \varphi_2 \sin \vartheta_2 \\ \cos \vartheta_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \arccos \left(\cos \varphi_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_2 \sin \vartheta_2 + \sin \varphi_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_2 \sin \vartheta_2 + \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \right) \\ &= \arccos \left(\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \right) \\ &= \arccos \left(\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \right), \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

mit dem Additionstheorem $\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ (Bronstein, 1999). Nach einsetzen der entsprechenden Werte ergibt sich ein Winkelabstand von $\sigma = 708,6''$.

Anhang C

Fotos



Abbildung C.1: IMG_2173, 20.01., 18:20



Abbildung C.2: IMG_2194, 20.01., 19:51

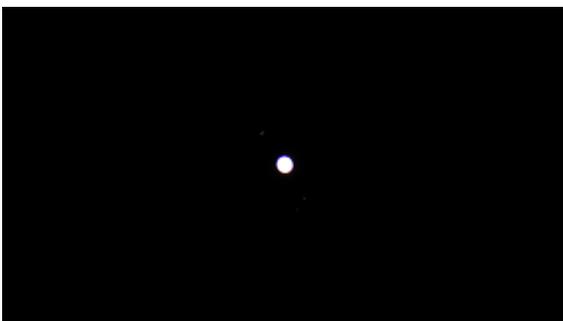


Abbildung C.3: IMG_2211, 20.01., 22:15



Abbildung C.4: IMG_2215, 20.01., 23:58



Abbildung C.5: IMG_2228, 21.01., 17:20



Abbildung C.6: IMG_2240, 21.01., 20:20



Abbildung C.7: IMG_2263, 22.01., 22:35



Abbildung C.8: IMG_2173, 23.01., 18:18



Abbildung C.9: IMG_2287, 24.01., 17:20



Abbildung C.10: IMG_2304, 24.01., 19:40

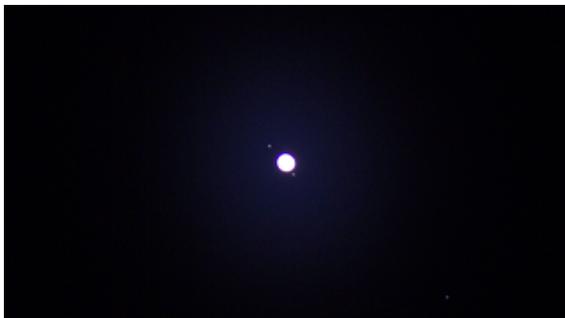


Abbildung C.11: IMG_2314, 24.01., 21:03



Abbildung C.12: IMG_2317, 24.01., 23:51



Abbildung C.13: IMG_2324, 25.01., 17:27



Abbildung C.14: IMG_2333, 26.01., 17:35



Abbildung C.15: IMG_2343, 26.01., 21:02



Abbildung C.16: IMG_2371, 26.01., 23:26



Abbildung C.17: IMG_2374, 27.01., 17:15



Abbildung C.18: IMG_2409, 27.01., 20:46



Abbildung C.19: IMG_2417, 27.01., 23:38



Abbildung C.20: IMG_2443, 28.01., 17:31



Abbildung C.21: IMG_2448, 28.01., 20:19



Abbildung C.22: IMG_2462, 28.01., 22:32

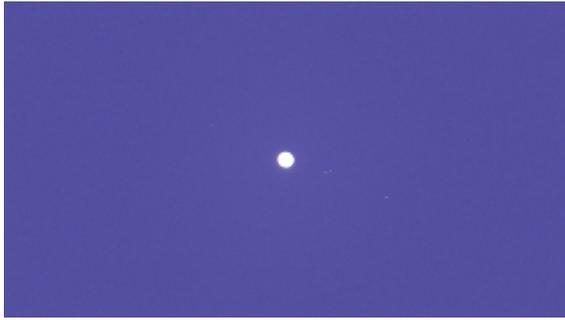


Abbildung C.23: IMG_2479, 29.01., 17:31



Abbildung C.24: IMG_2500, 29.01., 20:30



Abbildung C.25: IMG_2506, 30.01., 17:39

Alle hier gezeigten Bilder sind 960×540 Pixel große Ausschnitte der, in den sRGB-Farbraum umgewandelten, RAW-Dateien.

Literaturverzeichnis

- Horst Schecker, Martin Hopf, Hartmut Wiesner. Physikdidaktik kompakt. Aulis Verlag in Friedrich Verlag GmbH, 2017.
- Anselm Råde. LehrplanPLUS, Gymnasium, 2024. URL <https://www.lehrplanplus.bayern.de/schulart/gymnasium>.
- Wolfgang Demtröder. Experimentalphysik 1 Mechanik und Wärme, 9. Auflage. Springer-Verlag GmbH, 2021.
- Enzo Orlandi. Galilei und seine Zeit. Emil Vollmer Verlag Wiesbaden, 1966.
- Max Caspar. Johannes Kepler Gesammelte Werke, Band VI Harmonice Mundi. C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung München, 1990a.
- Max Caspar. Johannes Kepler Gesammelte Werke, Band III Astronomia Nova. C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung München, 1990b.
- Eugene Hecht. The true story of Newtonian gravity. (Englisch) [Die wahre Geschichte der Newton'schen Gravitation]. American Journal of Physics, 89(7):683–692, 2021. doi: <http://doi.org/10.1119/10.0003535>.
- Pierre Leich, Hans Gaab. Simon Marius and His Research. Springer Nature Switzerland AG, 2018.
- Helmut Seiffert. Einführung in die Wissenschaftstheorie 1, 13. Auflage. Verlag C.H. Beck oHG, München, 2003.
- Claudia Mähler. Naive Theorien im kindlichen Denken. Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 31(2), 2006. doi: <https://doi.org/10.1026//0049-8637.31.2.53>.
- Helmut F. Mikelskis. Physik-Didaktik Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II, 2. Auflage. Cornelsen Verlag, Berlin, 2010.
- Wolfgang Nolting. Grundkurs Theoretische Physik 1, 11. Auflage. Springer-Verlag GmbH, 2018.
- I. Ordóñez-Etxeberria et al. Introducing gravitational resonances from simple observations of Jupiter's Galilean satellites. (Englisch) [Einführung in die gravitativen Resonanzen von Jupiters Galilei'schen Monden mit einfachen Beobachtungen]. European Journal of Physics, 37(6), 2016. doi: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0143-0807/37/6/065601>.

- K.A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig, I.N. Bronstein. Taschenbuch der Mathematik, 4. Auflage. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1999.
- Dr. David R. Williams. Jovian satellite fact sheet, 2023. URL <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/joviansatfact.html>.
- Oliver Montenbruck. Grundlagen der Ephemeridenrechnung, 7. Auflage. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2005.
- J.H. Lieske. Theory of Motion of Jupiter's Galilean Satellites. (Englisch) [Theorie der Bewegung von Jupiters Galilei'schen Monden]. Astronomy and Astrophysics, 56(3), 1977. doi: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1977A%26A...56..333L>.
- Fabien Chéreau. Stellarium, 2023. URL <https://stellarium.org/de>.
- Juri Stare. Light polution map, 2023/2024. URL <https://www.lightpollutionmap.info>.
- Pierantonio Cinzano, Dan Duriscoe, Christopher C. M. Kyba, Christopher D. Elvidge, Kimberly Baugh, Boris Portnov, Nataliya A. Rybnikova, Riccardo Furgoni, Fabio Falchi. Supplement to: The new world atlas of artificial night sky brightness. gfz data services. falchi f, cinzano p, duriscoe d, kyba cc, elvidge cd, baugh k, portnov ba, rybnikova na, furgoni r. the new world atlas of artificial night sky brightness. science advances. 2016 jun 1;2(6):e1600377., 2016. URL <http://doi.org/10.5880/GFZ.1.4.2016.001>.
- John E. Bortle. Gauging light pollution: The bortle dark-sky scale, 2006. URL <https://skyandtelescope.org/astronomy-resources/light-pollution-and-astronomy-the-bortle-dark-sky-scale/>.
- Scott S. Sheppard. Moons of jupiter, 2023. URL <https://sites.google.com/carnegiescience.edu/sheppard moons/jupitermoons>.
- Statistikportal. Gemeindeverzeichnis, 2024. URL <https://www.statistikportal.de/de/gemeindeverzeichnis>.
- Wolfgang Eppensteiner, Konstantinos Chronopoulos, Wolfgang Ransburg. Teleskop-Service: Faszination Weltall & Natur, 2024. URL <https://www.teleskop-express.de>.
- Dr. Karl Remeis-Sternwarte. Astronomisches Praktikum, 2023.
- Amazon. Amazon, 2024. URL <https://www.amazon.de>.
- Canon. Canon EOS 2000D Bedienungsanleitung, 2017.
- Canon. Bildsensoren erklärt, 2024. URL <https://www.canon.de/pro/infobank/image-sensors-explained/>.
- Wolfgang Demtröder. Experimentalphysik 2 Elektrizität und Optik, 7. Auflage. Springer-Verlag GmbH, 2017a.
- Canon. Canon EOS 1000D Bedienungsanleitung, 2008.

- Dr. David R. Williams. Planetary fact sheet - metric, 2024a. URL <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/index.html>.
- Wolfgang Demtröder. Experimentalphysik 4 Kern-, Teilchen- und Astrophysik, 5. Auflage. Springer-Verlag GmbH, 2017b.
- Solar System Dynamics. Horizons system, 13.03.2024. URL <https://ssd.jpl.nasa.gov>.
- Dr. David R. Williams. Jovian fact sheet, 2024b. URL <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/jupiterfact.html>.
- Kaare Aksnes, Fred Franklin, Jay Lieske, Anlaug Amanda Kaas. Astrometry from mutual phenomena of the Galilean Satellites in 1990–1992. (Englisch) [Astrometrie aus wechselseitigen Phänomenen der Galilei'schen Monde von 1990—1992]. The Astronomical Journal, 177(4), 1999. doi: <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/300808>.
- B. E. Morgado et al. Milliarcsecond Astrometry for the Galilean Moons Using Stellar Occultations. (Englisch) [Millibogensekunden–Astrometrie für die Galileischen Monde unter Verwendung von Sternbedeckungen]. The Astronomical Journal, 163(5), 2022. doi: <https://doi.org/10.3847/1538-3881/ac6108>.
- Paul M. Schenk, Francis Nimmo, Trudi Hoogenboom, Oliver L. White. A new stereo topographic map of Io: Implications for geology from global to local scales. (Englisch) [Eine neue stereotopografische Karte von Io: Auswirkungen auf die Geologie vom globalen bis zum lokalen Maßstab]. Journal of Geophysical Research, 119(6), 2014. doi: <https://doi.org/10.1002/2013JE004591>.
- P.C. Thomas, R.T. Pappalardo, W.B. Moore, F. Nimmo. The global shape of Europa: Constraints on lateral shell thickness variations. (Englisch) [Die globale Gestalt Europas: Einschränkungen für radiale Schwankungen der Schalendicke]. Icarus, 191(1), 2007. doi: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2007.04.021>.
- I. Nadezhdina, J. Oberst, H. Hussmann, A. Stark, A. Zubarev. New Ganymede control point network and global shape model. (Englisch) [Neues Kontrollpunktnetzwerk von Ganymed und globales Modell zur Gestalt]. Planetary and Space Science, 117, 2014. doi: <https://doi.org/10.1016/j.pss.2015.06.022>.
- Thomas Williams et al. gnuplot version 5.4 patchlevel 1, 2020. URL <http://www.gnuplot.info>.
- Wenger et al. The simbad astronomical database. Astronomy and Astrophysics, 143(1), 2000. doi: <https://doi.org/10.1051/aas:2000332>.
- Ernst Kircher, Raimund Girwidz, Hans E. Fischer. Physikdidaktik Grundlagen, 4. Auflage. Springer-Verlag GmbH Deutschland, 2020.
- Dietmar Herdt. Vergleichende Untersuchung eines neuen Lehrgangs: Einführung in die elementare Optik. Westarp-Wiss., Essen, 1990.

- Martin Bader. Vergleichende Untersuchung eines neuen Lehrgangs: Einführung in die mechanische Energie und Wärmelehre. PhD thesis, Ludwig-Maximilians-Universität München, 2001. URL https://edoc.ub.uni-muenchen.de/191/1/Bader_Martin.pdf.
- Department Physik. Studien- und Prüfungsordnung für den Bachelorstudien- gang Physik und den Masterstudiengang Physics an der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Friedrich-Alexander- Universität Erlangen-Nürnberg (FAU) – BMPO/Physik –, 31.06.2023.
- David B. Newell, Barry N. Taylor, E. Tiesinga, Peter J. Mohr. Fundamental physical constants, 2019. URL <https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>.
- E.M. Standish. The Astronomical Unit now. (Englisch) [Die Astronomische Einheit jetzt]. Proceedings of the International Astronomical Union, 2004(IAUC196), 2004. doi: <https://doi.org/10.1017/S1743921305001365>.
- Dr. David R. Williams. Sun fact sheet, 2022. URL <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/sunfact.html>.
- Dr. David R. Williams. Saturn fact sheet, 2024c. URL <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/saturnfact.html>.
- Lambert Spix. Fern-Seher. Oculum-Verlag GmbH, Erlangen, 2009.
- Wenger et al. Simbad: Datenbankeintrag zu mizar a, 2020. URL http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/sim-id?Ident=zet01_uma.
- Wenger et al. Simbad: Datenbankeintrag zu alkor, 2007. URL <https://simbad.u-strasbg.fr/simbad/sim-id?Ident=alcor>.